تصحيح اختبار الفصل الأول 2018م

عبد المطلب

تمرين 1:

1) إشارة $f'(x)$: $\underset{}{-}\ \ 0\ \ +$

$x>0$: f متزايدة تماما

$x\leq 0$: f متناقصة تماما

2) $y=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})=x-\frac{3}{2}$

A نقطة انعطاف لأن $f'(x)$ انعدمت مغيرة إشارتها

3) إشارة $f(x)$: $+\ \ -\frac{1}{2}\ \ -$

4) $g'(x)=2f'(x)\cdot f(x)$

إشارة $g'(x)$: $-\ \ -\frac{1}{2}\ \ +\ \ 0\ \ -$

$-\frac{1}{2}<x<0$: g متزايدة تماما

$x\in]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup]0;+\infty[$: g متناقصة تماما

5) $f(\frac{1}{2})=-1$ و $f(-\frac{1}{2})=0$

$$\begin{cases}(\frac{a}{2}+b)e^{0}=-1\\(-\frac{a}{2}+b)e^{2}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}a+2b=-2\\-a+2b=0\end{cases}$$

عند حل هذه الجملة نجد $a=-1$ و $b=-\frac{1}{2}$

$$g(x)=(-x-\frac{1}{2})e^{-2x+1}$$

تمرين 2:

I-1) $g'(x)=(1+\frac{2}{x})>0$ ومنه g متزايدة تماما

2) g مستمرة ومتزايدة على $[1{,}3;1{,}4]$.
$g(1{,}3)=-0{,}17<0$ و $g(1{,}4)=0{,}07>0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}3<\alpha<1{,}4$.

إشارة $g(x)$: $0\ \ -\ \ \alpha\ \ +$

II-1) أ) $\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$ ($x=0$ مستقيم مقارب لـ (C))

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب) $f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln x+\frac{1}{x}(-2+\ln x)+1$

$$f'(x)=\frac{2\ln x-2+x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) $f(x)-x=(-2+\ln x)\ln x$

$f(x)-x=0$ لما $x=1$ أو $x=e^{2}$

$0\ \ +\ \ 1\ \ -\ \ e^{2}\ \ +$

$1<x<e^{2}$: (C) أسفل (Δ).

$x\in]0;1[\cup]e^{2};+\infty[$: (C) أعلى (Δ).

(C) يقطع (Δ) عند $(1;1)$ و (e^{2},e^{2}).

3) أ) (T) يوازي $y=x$: $f'(x_0)=1$.

$\frac{x_0-2+2\ln x_0}{x_0}=1$ ومنه: $2\ln x_0-2=0$

ومنه $\ln x_0=1$ ومنه $x_0=e$

$y=f'(e)(x-e)+f(e)=x-1$ (T)

ب) $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-x+2$ (T')

4) أ) $g(\alpha)=0$: $\alpha-2+2\ln\alpha=0$ ومنه $\ln\alpha=\frac{2-\alpha}{2}$

لدينا: $f(\alpha)=(-2+\ln\alpha)\ln\alpha+\alpha$

ومنه: $2+f(\alpha)=(-2+\frac{2-\alpha}{2})(\frac{2-\alpha}{2})+\alpha+2$

$$f(\alpha)+2=\frac{\alpha^{2}+4\alpha+4}{4}=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{2}$$

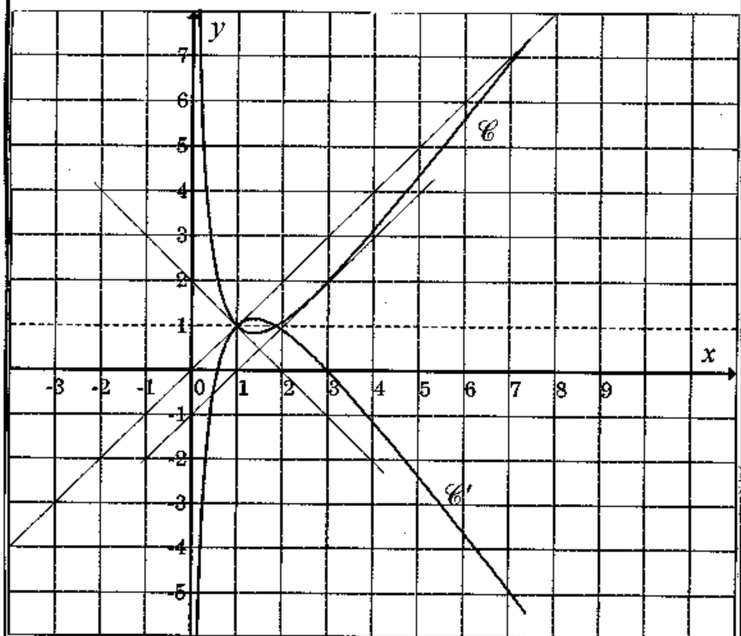
$1{,}3\leq\alpha\leq 1{,}4$: $3{,}3\leq\alpha+2\leq 3{,}4$

$1{,}65\leq\frac{\alpha+2}{2}\leq 1{,}7$: $2{,}7\leq\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{2}\leq 2{,}9$

$$0{,}7\leq\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{2}-2\leq 0{,}9$$

ومنه $0{,}7\leq f(\alpha)\leq 0{,}9$

ب) الرسم:



جـ) حلين متمايزين : $(2e^{?} > m > 2)$

5) أ) $h = 2 - f$: نناظر (C) بالنسبة لمحور الفواصل ثم نقوم بانسحاب شعاعه $(0;2)$.

ب) $h(x) = 2 - f(x)$ ومنه: $\dfrac{h(x)+f(x)}{2} = 1$

إذن (C) و(C') متناظران بالنسبة للمستقيم $y=1$

تمرين 3:

I- 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(xe^{-x} + e^{-x} - 1 \right) = -1$

2) $g'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1

3) القيمة الحدية الكبرى لـ g هي 0 ومنه $g(x) \leq 0$

II- 1) أ)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-x}\right)e = 0$

$y=0$ مستقيم مقارب لـ (C).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2 \times \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty$

ب) $f'(x) = (2x+2)e^{-x+1} - (x^2+2x+1)e^{-x+1}$

$f'(x) = (1-x^2)e^{-x+1}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0

2) أ) $y = f'(0)(x-0) + f(0) = ex + e$ (T)

ب) $f(x) - e(x+1) = (x+1)^2e^{-x+1} - e(x+1)$

$f(x) - e(x+1) = (x+1)\left[(x+1)e^{-x+1} - e\right]$

$f(x) - e(x+1) = (x+1)\cdot e \cdot \left[(x+1)e^{-x} - 1\right]$

$f(x) - e(x+1) = e(x+1)\cdot g(x)$

$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad -$

$x \in]-\infty;-1[$: (C) أعلى (T).

$x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$: (C) أسفل (T).

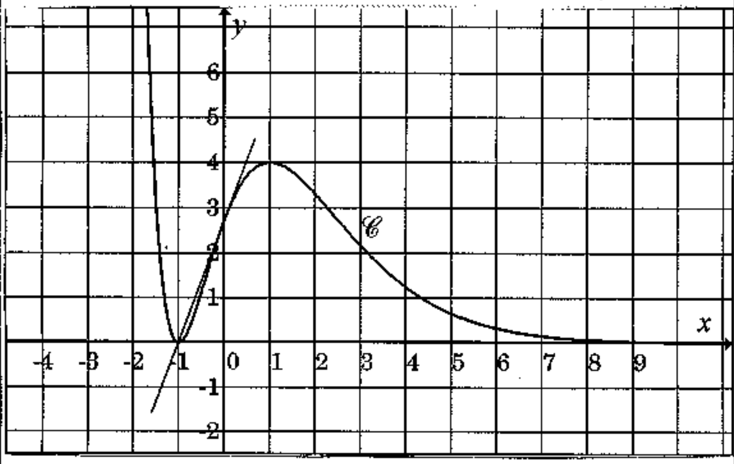
(C) يقطع (T) عند $(-1;0)$ ويمس (T) عند $(0;e)$

3) أ) $f''(x) = (x^2-2x-1)e^{-x+1}$

لما $f''(x)=0$: $x_1 = 1-\sqrt{2}$ و $x_2 = 1+\sqrt{2}$

$+ \quad x_1 \quad - \quad x_2 \quad +$

ب) الرسم:



4) $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 2e^{-x+1}$ ([illegible]$=0$)

5) أ) $x \in \mathbb{R}$ و $(-2-x) \in \mathbb{R}$

$h(-2-x) = (-2e - ex + e)^2 e^{-|-2-x+1|}$

$= (-e - ex)^2 e^{-|-x-1|}$

$h(-2-x) = (ex+e)^2 e^{-|x+1|} = h(x)$

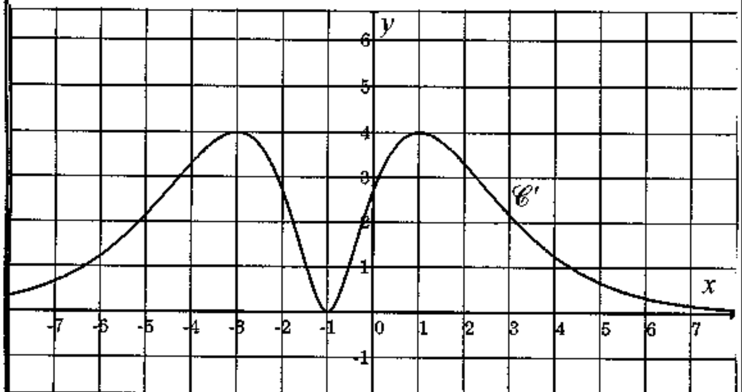
ومنه: $x=-1$ محور تناظر لـ (C').

ب) لما $x > -1$: $|x+1| = x+1$ ومنه:

$h(x) = (x+1)^2 \cdot e^2 \cdot e^{-(x+1)} = (x+1)^2 e^{-x+1} = f(x)$

جـ) $x > -1$: $h(x) = f(x)$: (C') ينطبق (C)

$x \leq -1$: نناظر الجزء المنطبق بالنسبة لـ $x=-1$.



"عبد المطلب"