تصحيح اختبار الفصل 2: 2019م

تمرين 1:

أ) 1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

$x \geq 1$ ، $\sqrt{x} \geq 1$ ، $2\sqrt{x} \geq 2$ ،

$2\sqrt{x}-1 \geq 1$ ومنه $f'(x)>0$ ، إذن f متزايدة

ب) $x>4$ ، $\sqrt{x}>2$ ، $-\sqrt{x}<-2$ ،

$2-\sqrt{x}<0$ ومنه $f(x)-x<0$ ،

ولما $x \leq 4$: $f(x)-x \geq 0$.

أ) 2) $u_0=1$: $1 \leq u_0 < 4$. محققة

نفرض أن $1 \leq u_n < 4$ ونبرهن صحة $1 \leq u_{n+1} < 4$

لدينا: $1 \leq u_n < 4$ ، $f(1) \leq f(u_n) < f(4)$

$1 \leq 2 \leq f(u_n) < 4$ ومنه $1 \leq u_{n+1} < 4$.

إذن $1 \leq u_n < 4$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ب) $u_{n+1}-u_n = 2-\sqrt{u_n}$. سابقا: $x \leq 4$ فإن $f(x)-x \geq 0$

$u_n \leq 4$ فإن $f(u_n)-u_n>0$ ومنه (u_n) متزايدة

ج) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$l = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n$ ، $l = l-\sqrt{l}+2$

$\sqrt{l}=2$ ومنه $l=4$

أ) 3) $n=0$: $v_0=9$ ، $4 < v_0 \leq 9$. محققة

نفرض أن $4 < v_n \leq 9$ ونبرهن: $4 < v_{n+1} \leq 9$

لدينا: $4 < v_n \leq 9$ ، $f(4) < f(v_n) \leq f(9)$.

$4 < f(v_n) \leq 8 \leq 9$ ومنه $4 < v_{n+1} \leq 9$.

إذن $4 < v_n \leq 9$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ب) $v_{n+1}-v_n = 2-\sqrt{v_n}$.

$v_n>4$ فإن $f(v_n)-v_n<0$ ومنه (v_n) متناقصة

ج) (v_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$\lim_{n \to +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} v_n = l'$ ، $l' = l'-\sqrt{l'}+2$

$\sqrt{l'}=2$ ومنه $l'=4$

4) (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة

و $l=l'$ إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان.

تمرين 2:

1) $|z_A| = 2\sqrt{3}$ و $\arg(z_A) = \frac{\pi}{3}$ ومنه $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\pi/3}$

$z_A^{2019} = \left(2\sqrt{3}e^{i\pi/3}\right)^{2019} = (2\sqrt{3})^{2019} e^{i\frac{2019\pi}{3}}$

$= (2\sqrt{3})^{2019}(\cos 673\pi + i\sin 673\pi)$

$= (2\sqrt{3})^{2019}(\cos\pi + i\sin\pi)$

بما أن $\sin\pi=0$ ومنه z_A^{2019} حقيقي .

2) أ) $\frac{z_B-z_A}{z_A} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i} = \frac{i(\sqrt{3}+3i)}{\sqrt{3}+3i} = i$

$\frac{z_B-z_A}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_A}\right| = \frac{|z_B-z_A|}{|z_A|} = \frac{AB}{OA} = 1$

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_A}\right) = (\vec{OA},\vec{AB}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه OAB مثلث قائم في A ومتساوي الساقين

$(\vec{OA},\vec{OB}) = \frac{\pi}{4}$

3) ب) $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2OA^2$

ومنه: $OB = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}|z_A| = 2\sqrt{6}$

$(\vec{u},\vec{OB}) = (\vec{u},\vec{OA}) + (\vec{OA},\vec{OB}) = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$

ب) $|z_B| = 2\sqrt{6}$ و $\arg(z_B) = \frac{7\pi}{12}$ ومنه $z_B = 2\sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$2\sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}+3)$

نجد: $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6}}$ و $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{6}}$

4) أ) $z_C = -3+\sqrt{3}i$

$\vec{OC} = \vec{AB}$ ومنه $OABC$ متوازي الأضلاع

ب) $\frac{z_C-z_A}{z_B} = \frac{-\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}-3)}{\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}+3)} = \frac{i(\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}+3))}{\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}+3)} = i$

$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B}\right| = \frac{AC}{OB} = 1$

$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B}\right) = (\vec{OB},\vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$

القطعتان $[OB]$ و $[AC]$ متعامدتان ومتقايستان

ومنه $OABC$ مربع .

5) أ) $z_O = \frac{z_A+\alpha z_B+z_C}{1+1+\alpha} = 0$

$\alpha = -\frac{z_A+z_C}{z_B} = -\frac{z_B}{z_B} = -1$

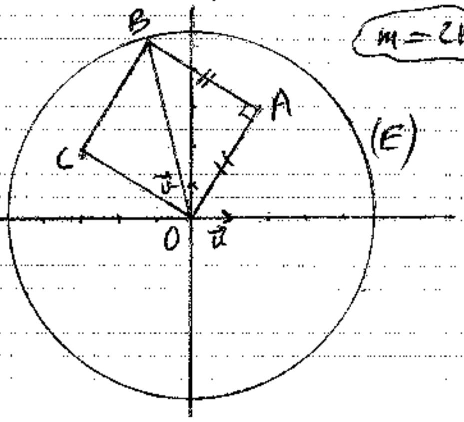
ب) $\|\vec{MO}+\vec{OA}-\vec{MO}-\vec{OB}+\vec{MO}+\vec{OC}\| = m$

$\|\vec{MO}+\underbrace{\vec{OA}-\vec{OB}+\vec{OC}}_{\vec{0}}\| = m$

$MO = m = OB = 2\sqrt{6}$

ومنه: $m = 2\sqrt{6}$

الرسم



تمرين 3:

1) أ) 3 بيضاء: $X=15$ ، 3 سوداء: $X=3n$

2 بيضاء 1 سوداء: $X=10+n$ ، 2 سوداء 1 بيضاء: $X=2n+5$

$P(X=15) = \frac{C_6^3}{C_{11}^3} = \frac{4}{33}$

$P(X=n+10) = \frac{C_6^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$

$P(X=2n+5) = \frac{C_6^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}$

5) أ) $f'(x) = 2x - 4 + 4x\ln x + 2x = 4x - 4 + 4x\ln x$

$f'(x) = 4(x - 1 + x\ln x) = 4g(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

$0 < x < 1$: f متناقصة ، $x \geq 1$: f متزايدة

ب) $f'(x) = 2(-e^x - e^x - xe^x) = 2(-2e^x - xe^x)$

$f'(x) = 2(-2-x)e^x = (-2x-4)e^x$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-2x-4)$.

x		-2		0
	$+$	0	$-$	

$x < -2$: f متزايدة ، $-2 \leq x < 0$: f متناقصة .

ج)

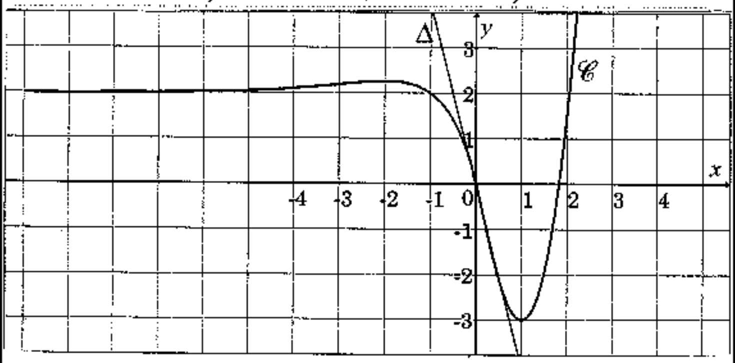
x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	$2(1+e^{-2})$	↘	0	↘	-3	↗	$+\infty$

6) أ) f مستمرة و متزايدة على $]1,8 ; 1,9[$ ،

$f(1,9) \simeq 0,64 > 0$ و $f(1,8) \simeq -0,15 < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,8 < \alpha < 1,9$

ب) $f(-1) = 2$ و $f(2,3) \simeq 4,9$



7) أ) $h(-x) = -x\left[-4 + |-x|\left(1 + \ln(-x)^2\right)\right]$

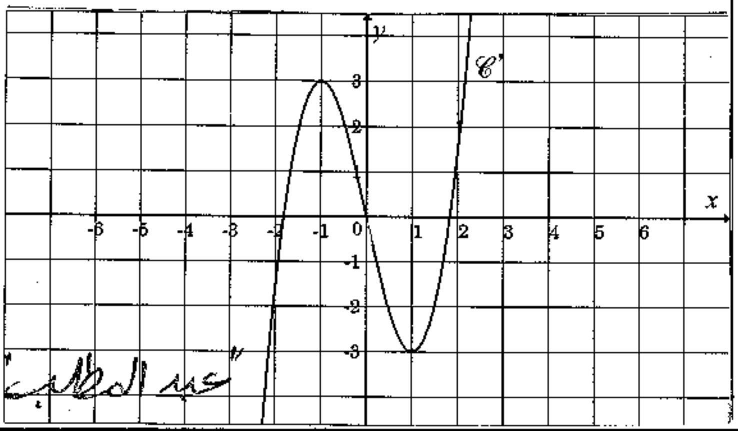
$h(-x) = -x\left[-4 + |x|\left(1 + \ln x^2\right)\right]$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $h(-x) = -h(x)$

ومنه h فردية.

ب) لما $x > 0$: $|x| = x$ ومنه $h(x) = f(x)$

(C) يطابق (C') ولما $x < 0$: بما أن h فردية نناظر الجزء المطابق بالنسبة للمبدأ O.



$P(X = 3n) = \frac{C_6^3}{C_{11}^3} = \frac{2}{33}$

X	15	$n+10$	$2n+5$	$3n$
$P(X)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{33}$

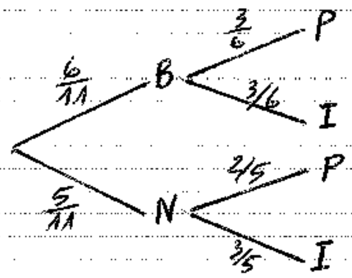
ب) $E(X) = 15 \times \frac{4}{33} + (n+10)\frac{5}{11} + (2n+5)\frac{4}{11} + 3n \cdot \frac{2}{33}$

$E(X) = \frac{45n + 270}{33} = \frac{15n + 90}{11} = \frac{15}{11}(n+6)$

$E(X) \geq 30$ أي $n + 6 \geq 22$

ومنه: $n \geq 16$ إذن $n = 16$

2) أ)



ب) $P(I) = \frac{6}{11} \times \frac{3}{6} + \frac{5}{11} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{11}$

تمرين 4:

I - 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = -1$

2) $g'(x) = 1 + \ln x + 1 = \ln x + 2$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	↘	$-1-e^{-2}$	↗	0	↗	$+\infty$

3) $g(1) = 0$ ، إشارة $g(x)$:

x	0		1	
		$-$	0	$+$

II - 1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2(1 - e^x - xe^x) = 2$

$y = 2$ مستقيم مقارب لـ (C) عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x(x-4) + 2x^2\ln x\right] = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0 = f(0)$ (مستمرة)

3) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x - 4 + 2x\ln x) = -4$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} 2\left(\frac{1 - e^x}{x} - e^x\right) = -4$

f قابلة للاشتقاق عند 0.

((C) يقبل مماسا ميله -4 عند 0)

4) (Δ) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -4x$