تصحيح البكالوريا التجريبي 2019 م

الموضوع الأول

تمرين 1:

1-أ) $U_{n+1}-3=\frac{U_n^2-3}{2(U_n-2)}-3=\frac{U_n^2-6U_n+9}{2(U_n-2)}=\frac{(U_n-3)^2}{2(U_n-2)}$

ب) $n=0$: $U_0=4\geq 3$ (محققة)

نفرض أن $U_n\geq 3$ ونبرهن أن $U_{n+1}\geq 3$ أي $U_{n+1}-3\geq 0$

لدينا: $U_{n+1}-3=\frac{(U_n-3)^2}{2(U_n-2)}\geq 0$ (محققة)
(ومنه $U_n\geq 3$)

جـ) $U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2-3}{2(U_n-2)}-U_n=\frac{-(U_n-1)(U_n-3)}{2(U_n-2)}\leq 0$

لأن $U_n-3\geq 0$ و $U_n-1\geq 0$ و $U_n-2\geq 0$. ((U_n) متناقصة)

2-أ) $U_{n+1}-3\leq\frac{1}{2}(U_n-3)$ تكافئ $U_{n+1}-3-\frac{1}{2}(U_n-3)\leq 0$

$\frac{U_n^2-3}{2(U_n-2)}-3-\frac{1}{2}(U_n-3)=\frac{-(U_n-3)}{2(U_n-2)}\leq 0$

ب) $n=0$: $U_0-3=1\leq 1$ (محققة)

نفرض أن $U_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ونبرهن $U_{n+1}-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

لدينا: $U_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ نضرب $\times\left(\frac{1}{2}\right)$: $\frac{1}{2}(U_n-3)\leq\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا سابقا: $U_{n+1}-3\leq\frac{1}{2}(U_n-3)$ ، $\frac{1}{2}(U_n-3)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

ومنه: $U_{n+1}-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ، إذن $U_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ صحيحة

جـ) لدينا: $0\leq U_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $\lim_{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

حسب مبرهنة الحصر فإن $\lim_{+\infty}(U_n-3)=0$

ومنه: $\lim_{+\infty}U_n=3$

3-
$$\begin{aligned}&U_0-3\leq\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\\+\;&U_1-3\leq\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\\&\quad\vdots\\+\;&U_n-3\leq\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

بالجمع: $(U_0-3)+(U_1-3)+\dots+(U_n-3)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$

(مجموع متتالية هندسية)

$\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\left(1-2^{-n-1}\right)$

$=2-2^{-n}$

ومنه:

$U_0-3+U_1-3+\dots+U_n-3\leq 2-2^{-n}$

$U_0+U_1+\dots+U_n-3-3-\dots-3\leq 2-2^{-n}$

$S_n-3(n+1)\leq 2-2^{-n}$

في الأخير $S_n\leq 5+3n-2^{-n}$

تمرين 2:

I- $\Delta=-24=(2\sqrt{6}i)^2$

ومنه: $z_1=3\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ و $z_2=3\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

II-1-أ) $z_A=2\sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ و $z_B=2\sqrt{6}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$\frac{z_A}{z_B}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=1$ أي $OA=OB$ / $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=-\frac{\pi}{3}$ أي $(\vec{OB},\vec{OA})=-\frac{\pi}{3}$

ومنه المثلث OAB متساوي الأضلاع.

ب) $z_A^n=(2\sqrt{6})^n e^{i\left(\frac{-n\pi}{6}\right)}$ و $z_B^n=(2\sqrt{6})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$

$z_A^n=z_B^n$ يعني: $\frac{n\pi}{6}=\frac{-n\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{N})$

ومنه: $n=6k$ $(n\in\mathbb{N})$

2-أ) $z_G=\frac{z_O+z_A+z_B}{3}=2\sqrt{2}$

ب) $GO=GA=GB=2\sqrt{2}$ ومنه O, A, B تنتمي إلى الدائرة: مركزها G و $r=2\sqrt{2}$ ($S=8\pi$ u.a)

3-أ) $z'-z_G=-\frac{1}{2}(z-z_G)$

ومنه $z'=-\frac{1}{2}z+3\sqrt{2}$

ب) (Γ') نحافظ على المركز ونصف قطرها: $r'=\frac{1}{2}r$

(Γ') هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $r'=\sqrt{2}$

$S=\pi r^2$ و $S'=\pi(r')^2$ ومنه $S'=2\pi$ u.a

جـ) $z_B=-\frac{1}{2}z_C+3\sqrt{2}$ ومنه $z_C=-2\sqrt{6}i$

$z_B-z_G=-\frac{1}{2}(z_C-z_G)$ ومنه $\vec{GB}=-\frac{1}{2}\vec{GC}$

إذن B, C و G على استقامة واحدة

د) $z_B+z_C=3\sqrt{2}+i\sqrt{6}-2\sqrt{6}i=3\sqrt{2}-i\sqrt{6}$

ومنه: $z_B+z_C=z_A$ أي $z_B=z_A-z_C$

$\vec{OB}=\vec{CA}$ إذن OCAB متوازي الأضلاع

لدينا سابقا: $AB=OB$ ومنه:

الرباعي OCAB معين.

تمرين 3:

1- $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ P_1 و $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ P_2

$\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطان خطيا ومنه P_1, P_2 يتقاطعان

$\begin{cases}x+2y-z=3\\x+y=2\end{cases}$ بوضع $z=t$: $\begin{cases}x+2y-t=3 & (1)\\x+y=2 & (2)\end{cases}$

$(1)-(2)$ ينتج: $y=t+1$ $(t\in\mathbb{R})$

نعوض في (1) نجد $x=-t+1$

ومنه التمثيل الوسيطي لـ (d):
$$t\in\mathbb{R}\begin{cases}x=-t+1\\ y=t+1\\ z=t\end{cases}$$

2- $\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BC}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ و $\overrightarrow{BC}(-1,1,2)$

$$\begin{pmatrix}x-2\\ y+1\\ z+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\ \alpha\\ 2\alpha\end{pmatrix}$$ ومنه: $(BC):\begin{cases}x=-\alpha+2\\ y=\alpha-1\\ z=2\alpha-2\end{cases}$

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (d).

$\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطان خطيا ومنه:
نحل الجملة:
$$\begin{cases}-t+1=-\alpha+2 & (1)\\ t+1=\alpha-1 & (2)\\ t=2\alpha-2 & (3)\end{cases}$$

$(1)+(2)$ ينتج: $2=1$ (مستحيل)
ومنه (d) و (BC) ليسا من نفس المستوي

3- $\overrightarrow{AD}\left(\frac{-1}{6};\frac{-5}{6};\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ومنه (AD) عمودي على (BC).

كذلك $D\in(BC)$: $\begin{cases}\frac{5}{6}=-\alpha+2\\ \frac{1}{6}=\alpha-1\\ \frac{1}{3}=2\alpha-2\end{cases}$ $\alpha=\frac{7}{6}$

$AD=\sqrt{\frac{5}{6}}$

4- أ) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD})\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD}+AD^2=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{5}{6}$
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$ ومنه $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

ب) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ هو المستوي الذي يشمل A و $\overrightarrow{AD}$ ناظمي له.
$-\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}y+\frac{1}{3}z+d=0$
نجد $d=1$:
ومنه: $P_3:\ -x-5y+2z+6=0$

5- $P_1\cap P_2$ هو المستقيم (d).
تقاطع (d) مع (P_3): $-t+1+5(t+1)-2t=6$
نجد: $t=0$ ومنه: $P_1\cap P_2\cap P_3$ هي $A(1,1,0)$

تمرين 4:

1- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln\left[\frac{e^x}{e^x\left(2-\frac{4}{e^x}\right)}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\ln 2}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\ln 2}x+\ln\left(\frac{e^x}{2e^x-4}\right)=+\infty$
$x=\ln 2$ مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C})$.

2- أ) $f(x)=x+\ln\left[\frac{e^x}{2(e^x-2)}\right]=x+\ln\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right)$
$f(x)=x-\ln 2+\ln\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-\ln 2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)}\right)=0$
ومنه: $y=x-\ln 2$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$.

جـ) $x>\ln 2$ ومنه $e^x-2>0$ ولدينا $e^x>e^x-2$
ومنه: $\frac{e^x}{e^x-2}>1$ إذن: $f(x)-y=\ln\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right)>0$

3- أ) $x\geq 2\ln 2$ ، $e^x\geq 4$ ، بإضافة e^x:
$2e^x\geq e^x+4$ ومنه: $e^x\leq 2e^x-4$.

$0<\frac{e^x}{2e^x-4}\leq 1$ ومنه: $g(x)=\ln\left(\frac{e^x}{2e^x-4}\right)\leq 0$

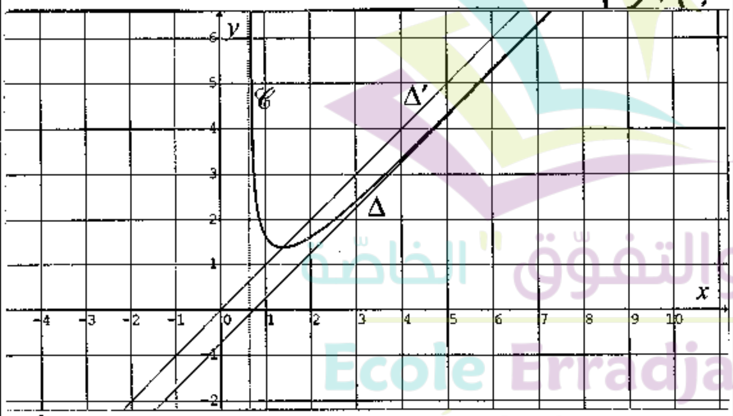
ب) $\ln 2$ + $2\ln 2$ − ، $(\mathcal{C})$ فوق (Δ) ، $(\mathcal{C})$ تحت (Δ) ، يقطع عند $(2\ln 2, 2\ln 2)$

4- أ) $f(x)=x+\ln e^x-\ln(2e^x-4)$
$f'(x)=2-\frac{2e^x}{2e^x-4}=\frac{e^x-4}{e^x-2}$

ب) إشارة $f'(x)$: $2\ln 2$ − +

x	$\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	$2\ln 2$	↗	

جـ) الرسم



5- أ) لدينا سابقا: $f(x)-x\leq 0$ لما $x\geq 2\ln 2$ (إشارة $g(x)$)
و $f(x)-(x-\ln 2)>0$ (الوضعية) ومنه:
$$x-\ln 2\leq f(x)\leq x$$

ب) $A=\int_{\frac{3}{2}}^{2}f(x)\,dx$ ولدينا $\int_{3/2}^{2}(x-\ln 2)\,dx\leq\int_{3/2}^{2}f(x)\,dx\leq\int_{3/2}^{2}x\,dx$
ومنه $\left[\frac{x^2}{2}-x\ln 2\right]_{3/2}^{2}\leq A\leq\left[\frac{x^2}{2}\right]_{3/2}^{2}$ أي $0{,}528\leq A\leq 0{,}875$

6- أ) $n=0$: $2\ln 2\leq u_0=\ln 6\leq\ln 6$ (محققة)
نفرض أن: $2\ln 2\leq u_n\leq\ln 6$ ونبرهن: $2\ln 2\leq u_{n+1}\leq\ln 6$
f متزايدة على $[2\ln 2,+\infty[$ ومنه: $f(\ln 4)\leq f(u_n)\leq f(\ln 6)$
أي $\ln 4\leq f(u_n)\leq\ln 6+\ln\frac{3}{4}$ ، $\ln 4\leq u_{n+1}\leq\ln 6$
ومنه $\ln 4\leq u_n\leq\ln 6$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب) $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=g(u_n)$
سابقا: $g(u_n)\leq 0$ من أجل $u_n\geq 2\ln 2$ ومنه:
$f(u_n)-u_n\leq 0$ (متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة) $f(\ell)=\ell$ ومنه $\ell=\ln 4$

الموضوع الثاني

تمرين 1:

1) $U_1 = \frac{1}{4}U_0 = \frac{1}{8}$ ، $U_2 = \frac{1}{24}$ ، $U_3 = \frac{1}{64}$

2-أ) $n=0$: $U_0 = \frac{1}{2} > 0$

نفرض أن $U_n>0$ ونبرهن $U_{n+1}>0$.

$n+1>0$ و $2n+4>0$ و $U_n>0$ ومنه $\frac{n+1}{2n+4}U_n>0$

$U_{n+1}>0$ ومنه $U_n>0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب) $U_{n+1}-U_n = \frac{n+1}{2n+4}U_n - U_n = -\left(\frac{n+3}{2n+4}\right)U_n < 0$

ومنه (U_n) متناقصة تماما

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3-أ) $V_{n+1} = (n+2)U_{n+1} = (n+2)\cdot\frac{(n+1)}{2(n+2)}U_n$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)U_n = \frac{1}{2}V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية حدها الأول $V_0 = \frac{1}{2}$

ب) $U_n = \frac{V_n}{n+1} = \frac{V_0 \cdot q^n}{n+1} = \frac{(1/2)^n}{2(n+1)}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

4-أ) $S_n = V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$

$S_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$P_n = V_0 \times V_0 q^1 \times V_0 q^2 \times \dots \times V_0 q^n$

$P_n = V_0^{\,n+1} \times q^{1+2+\dots+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+3n+2}{2}}$

ب) $P'_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n = \frac{V_0}{1} \times \frac{V_1}{2} \times \dots \times \frac{V_n}{n+1}$

$P'_n = \frac{V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n}{1\times 2\times 3\times\dots\times(n+1)} = \frac{P_n}{(n+1)!}$

تمرين 2:

1-أ) $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_B} = \frac{-4+4i}{2+2i} = 2i$

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_B}\right) = (\vec{BC},\vec{AB}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه ACB قائم

ب) $\frac{z_C-z_B}{z_A} = \frac{z_A}{z_A} = 1$

$\vec{BC} = \vec{OA}$ ومنه OACB متوازي الأضلاع

جـ) $(z_A+z_B+z_C)^{2019} = (16i)^{2019}$

$= 16^{2019}\cdot e^{i\frac{2019\pi}{2}}$

$(z_A+z_B+z_C)^{2019} = 16^{2019}\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$= 16^{2019}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

بما أن $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ فإن $(z_A+z_B+z_C)^{2019}$ تخيلي صرف

$(z_A+z_B+z_C)^{2019} = -16^{2019}i$

2-أ) $\frac{z_C+z_D}{2} = z_B$ ومنه $z_D = 2z_B - z_C = -4+4i$

ب) $z' - z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_0)$

$z_D - z_0 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(z_C - z_0)$

$z_D = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(8i) = -4+4i$ (محققة)

3-أ) OECD مربع يعني: $\vec{OE} = \vec{DC}$

$z_E = z_C - z_D = 4+4i$

ب) نلاحظ أن: $\bar{z}_D = -z_E$

ومنه: $|z-z_0| = |z-z_E|$

$OM = EM$: (Γ_1) هي محور القطعة $[OE]$.

$\frac{z_B-z_A}{z_E} = i$ ومنه (AB) عمودي على (OE)

$\frac{z_O+z_E}{2} = z_A$ ومنه A هي منتصف $[OE]$.

إذن المستقيم (AB) محور القطعة $[OE]$

4-أ) $z_A = \frac{-z_C+z_D+2z_E}{-1+1+2} = 2+2i$ (محققة)

ب) $\|-\vec{MC}+\vec{MD}+2\vec{ME}\| = \|\vec{ME}-\vec{MO}\|$

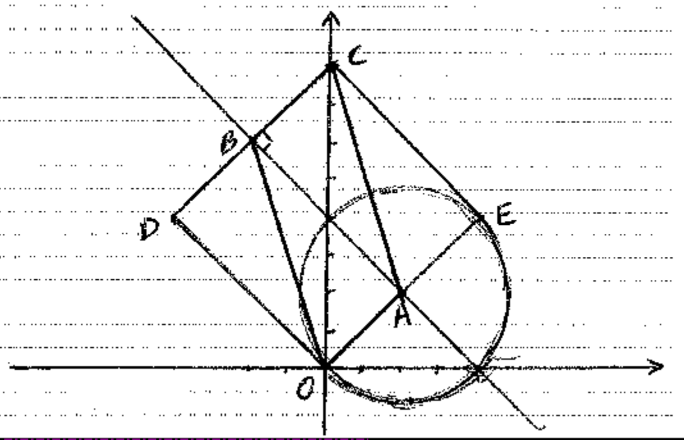
$\|-(\vec{MA}+\vec{AC})+(\vec{MA}+\vec{AD})+2(\vec{MA}+\vec{AE})\| = \|\vec{EM}+\vec{MO}\|$

$\|2\vec{MA}\underbrace{-\vec{AC}+\vec{AD}+2\vec{AB}}_{\vec{0}}\| = \|\vec{EO}\|$

$MA = \frac{EO}{2} = OA$

ومنه (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها A وتشمل O.

$(r = OA = 2\sqrt{2})$



$f'(x) = (x+1)e^{x+1}$: $x \le -1$ (أ -3

بما أن $x \le -1$ فإن $(x+1) \le 0$ ومنه : $f'(x) \le 0$

$f'(x) = -e^{-x+1} + 1$: $x > -1$

$x > -1$ ؛ $-x < 1$ ؛ $-x-1 < 0$ ؛ $e^{-x-1} < 1$

$-e^{-x-1} > -1$ ، $1 - e^{-x-1} > 0$ ومنه : $f'(x) > 0$

ب) $x \le -1$: f متناقصة

$x > -1$: f متزايدة .

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

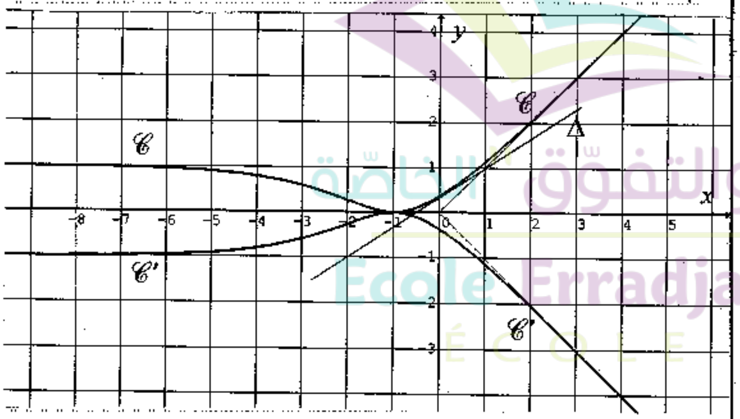
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (أ -4

$1 = f'(x_0)(1 - x_0) + f(x_0)$

$1 = (1 - e^{-x_0+1})(1 - x_0) + e^{-x_0-1} + x_0$

$x_0 e^{-x_0-1} = 0$ و منه $x_0 = 0$

ب) (C') هو نظير (C) بالنسبة للمحور (Ox) .



(أ-5 نضع : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=e^{x+1}\end{cases}$ $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{x+1}\end{cases}$

$\int_{-3}^{-1} x e^{x+1} dx = [x e^{x+1}]_{-3}^{-1} - \int_{-3}^{-1} e^{x+1} dx$

$\int_{-3}^{-1} x e^{x+1} dx = [(x-1)e^{x+1}]_{-3}^{-1} = 4e^{-2} - 2$

ب) $A = \int_{-3}^{-1} f(x) - (-f(x))\, dx = 2\int_{-3}^{-1} f(x)\, dx$

$A = 2\left[\int_{-3}^{-1} x e^{x+1} dx + \int_{-3}^{-1} 1\, dx\right] = 2\left[(-2+4e^{-2}) + [x]_{-3}^{-1}\right]$

$A = \frac{8}{e^2} \simeq 1{,}08$

6) $m \le 0$: لا يوجد حلول

$0 < m < \frac{1}{e}$: حل موجب

$m = 1/e$: حل معدوم

$m > 1/e$: حل سالب

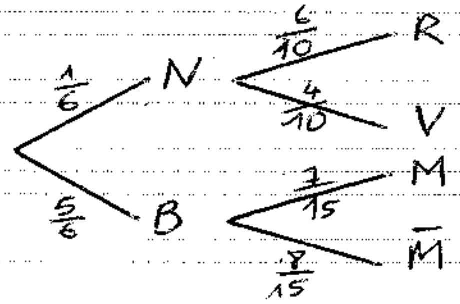
"عبد المطلب"

التمرين 3 :

1- $P_1 = \frac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$

2- $P_2 = \frac{5}{6}$

3- أ)



ب) $P(M) = \frac{5}{6} \times \frac{7}{15} = \frac{7}{18}$

ج) $P(X=2) = P(\bar{M}) = \frac{5}{6} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{9}$

$P(X=1) = 1 - P(X=2) = \frac{5}{9}$

تمرين 4 :

1- أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x e^{x} \cdot e + 1 = 1$

$y = 1$: مستقيم مقارب لـ (C) .

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x-1} + x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x-1} = 0$

$y = x$: مستقيم مقارب مائل لـ (C) . (بجوار $+\infty$)

2- $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(h-1)e^{h} + 1}{h}$

$= \lim_{h\to 0^-} \left[1 - \frac{e^{h} - 1}{h}\right] = 0$

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-h} + h - 1}{h}$

$= \lim_{h\to 0^+} \left[1 - \frac{e^{-h} - 1}{-h}\right] = 0$

$f'_d(-1) = f'_g(-1)$: f قابلة للاشتقاق عند