تصحيح اختبار الفصل الأول، 2019م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

I-1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x - 1) = -1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = (-\infty)\times(+\infty) = -\infty$

2) $g'(x) = -e^x + e^x(2-x) = (1-x)e^x$

إشارة $g'(x)$: $+ \quad 1 \quad -$

$x<1$: $g'(x)>0$ ، ومنه g متزايدة تماما.

$x>1$: $g'(x)<0$ ، ومنه g متناقصة تماما.

$x=1$: $g'(x)=0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	-1 ↗	$e-1$	↘ $-\infty$

3) g مستمرة ومتزايدة على $]-1,2;-1,1[$ ، $f(-1,2)\simeq 0,03>0$ و $f(-1,1)\simeq -0,04<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

g مستمرة ومتناقصة على $]1,8;1,9[$ $g(1,8)\simeq 0,2>0$ ، $g(1,9)\simeq -0,3<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $1,8<\beta<1,9$

4) إشارة $g(x)$: $- \quad \alpha \quad + \quad \beta \quad -$

II-1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(3e^x - xe^x - x - 1) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty}(3e^x - xe^x) = 0$

ومنه (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ): $y=-x-1$.

جـ) ندرس إشارة: $f(x)-y = (3-x)e^x$

$+ \quad 3 \quad -$

$x<3$: (C) فوق (Δ)،

$x>3$: (C) تحت (Δ).

(C) يقطع (Δ) عند النقطة: $(3;-4)$.

2) أ) $f'(x) = -e^x + e^x(3-x) - 1 = (2-x)e^x - 1$

$f'(x) = g(x)$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α		β	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘ $-\infty$

ب) (Δ') يشمل النقطة: $(-\frac{3}{2};\frac{1}{2})$:

$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$\frac{1}{2} = f'(x_0)(-\frac{3}{2}-x_0) + f(x_0)$

$\frac{1}{2} = [(2-x_0)e^{x_0}-1](-\frac{3}{2}-x_0) + (3-x_0)e^{x_0} - x_0 - 1$

نجد: $(x_0^2 - \frac{3}{2}x_0)e^{x_0} = 0$

إذا: $x_0=0$ أو $x_0=\frac{3}{2}$.

طريقة أبسط:
$y=ax+b$
$b=2 \quad a=1$

جـ) (Δ) يعامد (Δ') يعني: $f'(x_0)\times(-1) = -1$ (جداء الميلين $=-1$)

$f'(x_0)=1$ يتحقق لما $(x_0=0)$.

(Δ'): $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x+2$

جـ) $f''(x) = g'(x) = (1-x)e^x$ $\quad + \quad 1 \quad -$

f'' تنعدم وتغير إشارتها ومنه النقطة $(1;2e-2)$

3) أ) $f(\alpha) = (3-\alpha)e^\alpha - \alpha - 1$ ولدينا: $g(\alpha)=0$

$(2-\alpha)e^\alpha - 1 = 0$ ومنه: $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$ ،

نعوضها في $f(\alpha)$: $f(\alpha) = \frac{3-\alpha}{2-\alpha} - \alpha - 1$

$f(\alpha) = \frac{\alpha^2-2\alpha+1}{2-\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha}$

$-1,2<\alpha<-1,1$ ؛ $1,1<-\alpha<1,2$

$2,1<1-\alpha<2,2$ ؛ $4,41<(1-\alpha)^2<4,84$

$3,1<2-\alpha<3,2$ ؛ $0,31<\frac{1}{2-\alpha}<0,32$

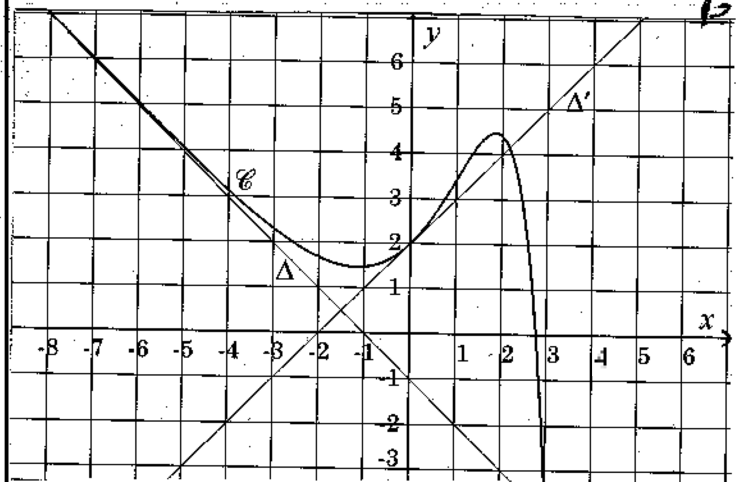
$1,38<f(\alpha)=\frac{(1-\alpha)^2}{2-\alpha}<1,56$

$1,8<\beta<1,9$ و $f(\beta) = \frac{(1-\beta)^2}{2-\beta}$

بنفس الطريقة السابقة نجد: $3,2<f(\beta)<8,1$

ب) f مستمرة ومتناقصة على $]2,7;2,8[$ و $f(2,7)\simeq 0,8>0$ ، $f(2,8)\simeq -0,5<0$ إذن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا λ.

جـ)



4) $(3-x)e^x - x - 1 = x + m - 1$ ومنه: $f(x) = x+m-1$. فواصل نقاط تقاطع (C) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ').

حلا واحدا موجبا: $m-1<2$ ومنه: $m<3$

5) أ) لدينا: $f(-x) = (3+x)e^{-x} + x - 1$

ومنه: $-f(-x) = -(3+x)e^{-x} - x + 1 = h(x)$

ب) المنحنى ② يمثل الدالة h: نناظر (C) بالنسبة لمحور التراتيب $(f(-x))$ ثم بالنسبة لمحور الفواصل $(-f(-x))$.

"عبد المطلب"

تمرين 2:

I (1 أ) $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} g_1(x) = -\infty$ (مستقيم مقارب $x=-1$)

$$\lim_{x \to +\infty} g_1(x) = +\infty$$

ب) $g_1'(x) = \frac{2}{x+1} > 0$ ، ومنه g_1 متزايدة تماما.

2) أ) $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} g_2(x) = -\infty$ (مستقيم مقارب $x=-1$)

ب) $g_2'(x) = \frac{-2}{-x-1} < 0$ ، ومنه g_2 متناقصة تماما

$\lim_{-\infty} g_2(x) = +\infty$

3) أ) لدينا: $g(x) = 2\ln|x+1| - 2$

لما $x > -1$: $g(x) = 2\ln(x+1) - 2 = g_1(x)$

ولما $x < -1$: $g(x) = 2\ln(-x-1) - 2 = g_2(x)$

ومنه: $(\mathcal{C}_g) = (\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$.

ب) معادلة المماس: $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

مماس يشمل $(-1;-4)$:

$$-4 = g'(x_0)(-1-x_0) + g(x_0)$$

$$-4 = \frac{2}{x_0+1}(-1-x_0) + \ln(x_0+1)^2 - 2$$

$$-4 = -2 + \ln(x_0+1)^2 - 2$$

$\ln(x_0+1)^2 = 0$ ، ومنه $(x_0+1)^2 = 1$

$x_0 + 1 = 1$ أو $x_0 + 1 = -1$

ومنه: $x_0 = 0$ أو $x_0 = -2$

$A(0;-2)$ ؛ $B(-2;-2)$

$$\boxed{y_1 = 2x - 2} \quad ; \quad \boxed{y_2 = -2x - 6}$$

جـ) $g(x) = 0$ يعني: $\ln(x+1)^2 = 2$

$(x+1)^2 = e^2$ ومنه: $x+1 = e$ أو $x+1 = -e$.

$A'(e-1;0)$ و $B'(-e-1;0)$

II (1 أ) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب) $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{9}{t} + \ln t - 2\right)$

$$= \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{9 + t\ln t}{t} - 2\right) = +\infty$$

بنفس الطريقة نجد: $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$

يوجد مستقيم مقارب معادلته: $x = -1$

جـ) $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to -\infty} \frac{9}{(x+1)^2} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{9}{(x+1)^2} = 0$$

ومنه $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ متقاربان بجوار $-\infty$ و $+\infty$

2) أ) $f'(x) = \frac{-2(x+1) \times 9}{(x+1)^4} + \frac{2}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{-18}{(x+1)^3} + \frac{2}{x+1} = \frac{-18 + 2(x+1)^2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 16}{(x+1)^3} = \frac{2(x-2)(x+4)}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+1)^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

ب)

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-1+2\ln 3$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-1+2\ln 3$	↗	$+\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ أن: $f(x) > 0$

3) أ) $x \neq -1$ ، $-x \neq 1$ ومنه: $-x-2 \neq -1$

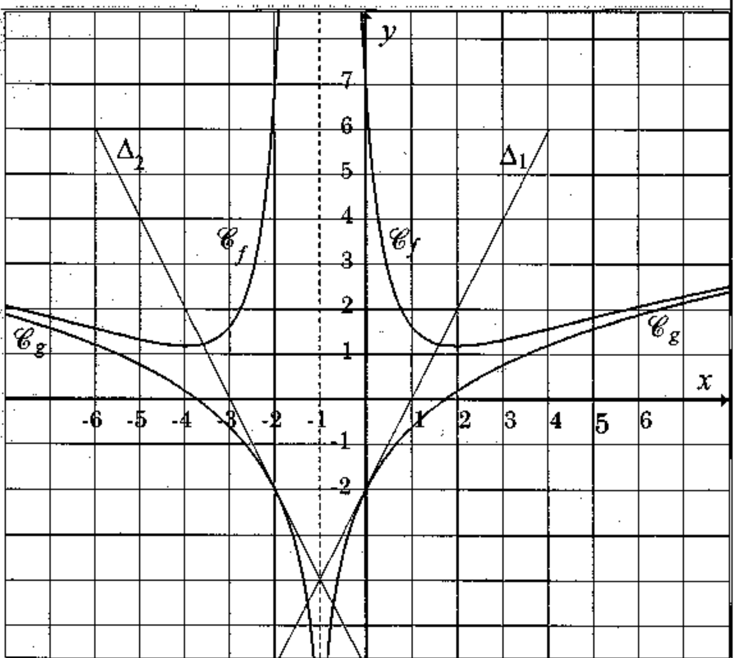
$$f(-2-x) = \frac{9}{(-x-1)^2} + \ln(-x-1)^2 - 2 = \frac{9}{(x+1)^2} + \ln(x+1)^2 - 2$$

$f(-2-x) = f(x)$ ومنه $x = -1$ محور تناظر لـ $(\mathcal{C}_f)$

ب) $f(0) = 7$ و $f(-2) = f(-2-0) = f(0) = 7$

جـ) $f(x) - g(x) = \frac{9}{(x+1)^2} > 0$

ومنه $(\mathcal{C}_f)$ فوق $(\mathcal{C}_g)$ من أجل $x \neq -1$.



4) أ) $\lim_{|x| \to +\infty} h(x) = 0$ لأن: $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -1} h(x) = 0$ لأن: $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

ب) $h'(x) = -f'(x)\, e^{-f(x)-1}$

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{9}$	↘	0 ‖ 0	↗	$\frac{1}{9}$	↘	0