تصحيح اختبار الفصل الثاني 2020م

تمرين 1:

1) $P(A) = \dfrac{C_6^4}{C_{11}^4} = \dfrac{1}{22}$; $P(B) = \dfrac{C_5^4}{C_{11}^4} = \dfrac{1}{66}$

$$P(C) = 1 - [P(A) + P(B)] = \frac{31}{33}$$

2) $X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$P(X=0) = \dfrac{C_5^4}{C_{11}^4} = \dfrac{1}{66}$; $P(X=1) = \dfrac{C_6^1 \times C_5^3}{C_{11}^4} = \dfrac{2}{11}$

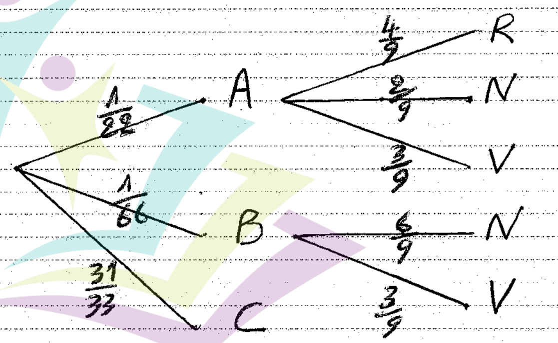
$P(X=2) = \dfrac{C_6^2 \times C_5^2}{C_{11}^4} = \dfrac{5}{11}$; $P(X=3) = \dfrac{C_6^3 \times C_5^1}{C_{11}^4} = \dfrac{10}{33}$

$$P(X=4) = \frac{C_6^4}{C_{11}^4} = \frac{1}{22}$$

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{66}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{1}{22}$

$$E(X) = 0\times\frac{1}{66} + 1\times\frac{2}{11} + 2\times\frac{5}{11} + 3\times\frac{10}{33} + 4\times\frac{1}{22} = \frac{24}{11}$$

3) أ)



ب) $P(B \cap N) = \dfrac{1}{66} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{99}$

$$P(N) = P(A\cap N) + P(B \cap N) = \frac{1}{99} + \frac{1}{99} = \frac{2}{99}$$

$$P_N(B) = \frac{P(B\cap N)}{P(N)} = \frac{1}{2}$$

تمرين 2:

I 1) نعوض z بـ α: $\alpha^3 - (2+\alpha)\alpha^2 + 2(1+\alpha)\alpha - 2\alpha = 0$

2) $(z-\alpha)(z^2+bz+c) = z^3 + (b-\alpha)z^2 + (c-\alpha b)z - \alpha c$

بالمطابقة مع (E) نجد: $b - \alpha = -2 - \alpha$ ،

$c - \alpha b = 2 + 2\alpha$ و $-\alpha c = -2\alpha$

ومنه: $b = -2$ و $c = 2$

3) $(z-\alpha)(z^2 - 2z + 2) = 0$

$z = \alpha$ أو $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = -4 = 4i^2$ ، ومنه: $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = 1 + i$

II 1) $z_A = 1 - i$ ، $z_B = 1 + i$

2)
$$(z_A - z_B)^{2020} = (-2i)^{2020} = (-2)^{2020} \times i^{2020} = 2^{2020} \times (i^2)^{1010}$$
$$= 2^{2020} \times 1 = (z_A + z_B)^{2020}$$

3) أ)
$$Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1-\alpha-i}{1-\alpha+i} = \frac{(1-\alpha-i)(1-\alpha-i)}{(1-\alpha+i)(1-\alpha-i)}$$

$$Z = \frac{(1-\alpha-i)^2}{(1-\alpha)^2 - i^2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} + i\,\frac{2\alpha - 2}{\alpha^2 - 2\alpha + 2}$$

A و B و C في استقامية يعني: $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

ومنه Z حقيقي بمعنى الجزء التخيلي معدوم.

$2\alpha - 2 = 0$ ومنه: $\alpha = 1$

ب) ABC مثلث قائم يعني: $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ومنه Z تخيلي صرف بمعنى الجزء الحقيقي معدوم.

$\alpha(\alpha - 2) = 0$ ومنه $\alpha = 0$ أو $\alpha = 2$

جـ) ABC متقايس الأضلاع: $AB = AC = BC$

$|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$ ؛ $|2i| = |\alpha - 1 + i| = |\alpha - 1 - i|$

أي: $\sqrt{(\alpha-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2^2}$ ؛ $(\alpha - 1)^2 + 1 = 4$

$\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$ ومنه: $\alpha = 1 - \sqrt{3}$ أو $\alpha = 1 + \sqrt{3}$

4)
$$z_G = \frac{z_A + z_B + \sqrt{2}z_C}{1 + 1 + \sqrt{2}} = \frac{2 - 2}{2 + \sqrt{2}} = 0$$

$$\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \sqrt{2}\overrightarrow{MG} + \sqrt{2}\overrightarrow{GC}\| = 2(1+\sqrt{2})$$

$$\|(2+\sqrt{2})\overrightarrow{MG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \sqrt{2}\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\| = 2(1+\sqrt{2})$$

$MG = \dfrac{2(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ؛ (Γ): دائرة مركزها G و $r = \sqrt{2}$

لدينا: $GA = GB = GC = \sqrt{2}$ ومنه (Γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

تمرين 3:

1) $$u_{n+1} = \frac{2u_n - 3 - 1}{4u_n - 6} = \frac{2u_n - 4}{4u_n - 6} = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3}$$

$0 \leqslant u_n < 1$: $0 \leqslant u_0 = 0 < 1$ (محققة)

نفرض أن $0 \leqslant u_n < 1$ ونبرهن صحة: $0 \leqslant u_{n+1} < 1$

$0 \leqslant u_n < 1$ ؛ $0 \leqslant 4u_n < 4$ ؛ $-6 \leqslant 4u_n - 6 < -2$

$-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{4u_n - 6} \leqslant -\dfrac{1}{6}$ ؛ $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{-1}{4u_n - 6} < \dfrac{1}{2}$

$0 \leqslant \dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4u_n - 6} < 1$ ومنه $0 \leqslant u_{n+1} < 1$

في الأخير من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n < 1$.

2) $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 4u_n - 2}{2u_n - 3} = \frac{-2(u_n - 1)^2}{2u_n - 3}$$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(u_n - 1)^2}{3 - 2u_n}$ ؛ $(u_n - 1)^2 \geqslant 0$ و $(3 - 2u_n) > 0$ لأن $0 \leqslant u_n < 1$

$u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما.

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ)
$$v_{n+1} = \frac{\alpha}{u_{n+1} - 1} - (n+1) = \frac{\alpha}{\frac{u_n - 2}{2u_n - 3} - 1} - n - 1 = \frac{\alpha(2u_n - 3)}{1 - u_n} - n - 1$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\alpha(2u_n - 3)}{1 - u_n} - n - 1 - \frac{\alpha}{u_n - 1} + n = \frac{\alpha(2u_n - 2)}{1 - u_n} - 1$$

$v_{n+1} - v_n = -2\alpha - 1$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $-2\alpha - 1$

لدراسة التغيرات ندرس إشارة $-2\alpha - 1$.

$\alpha < -\frac{1}{2}$: (v_n) متزايدة ، $\alpha > -\frac{1}{2}$: (v_n) متناقصة

ب) $\alpha = 1$: $v_0 = \frac{1}{-1} - 0 = -1$ وأساسها $r = -3$.

$$v_n = v_0 + nr = -3n - 1$$

$v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} - n$ ومنه: $\dfrac{1}{u_n - 1} = v_n + n$

$u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n + n}$ ومنه $u_n = \dfrac{1}{-2n - 1} + 1$

$$\lim_{+\infty} u_n = 1$$

4) لدينا : $V_n + n = \frac{1}{U_n - 1}$ ومنه:

$$S_n = \frac{1}{U_0-1}+\frac{1}{U_1-1}+\dots+\frac{1}{U_n-1} = (V_0+0)+(V_1+1)+\dots+(V_n+n)$$

$$S_n = V_0+V_1+\dots+V_n + 0+1+\dots+n$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(-1-3n-1) + n\frac{(n+1)}{2} = -(n+1)^2$$

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to 0^{>}} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to 0^{>}} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(2 - e\frac{\ln x}{x}\right) + 1 - e\right] = +\infty$$

2) $g'(x) = 2 - \frac{e}{x} = \frac{2x-e}{x}$ ، $-\ \overset{e/2}{\oplus}\ +$

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$0,17$	↗	$+\infty$

3) $g(\frac{e}{2})>0$ ومنه $g(x)>0$. (القيمة الحدية الصغرى موجبة)

4) $g(e)=1$. g مستمرة ومتناقصة تماما على $]0,5;0,6[$. $g(0,5)=1,17>1$ و $g(0,6)=0,87<1$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,5;0,6[$

II-1) $\lim_{x\to 0^{>}} f(x) = \lim_{x\to 0^{>}} [x^2+x-ex\ln x] = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x} - e\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2) أ) $f'(x) = 2x+1-e\ln x - \frac{e}{x}\cdot x = 2x+1-e-e\ln x$

$f'(x) = g(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

ب) $f'(x_0)=1$ بمعنى: $g(x_0)=1$

لدينا سابقا $g(x)=1$ تقبل حلين e و α ، ومنه $g(x_0)=1$ لما $x_0=e$ أو $x_0=\alpha$ ،

جـ) $x_0=e$: $y_1 = f'(e)(x-e)+f(e)$

(Δ_1): $y_1 = x$

$x_0=\alpha$: $y_2 = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

$$y_2 = 1(x-\alpha)+\alpha^2+\alpha - e\alpha\ln\alpha = x+\alpha^2 - e\alpha\ln\alpha$$

لدينا $g(\alpha)=1$ ومنه $2\alpha+1-e-e\ln\alpha = 1$

ومنه: $\ln\alpha = \frac{2\alpha}{e}-1$: $y_2 = x+\alpha^2 - e\alpha\left(\frac{2\alpha}{e}-1\right)$

(Δ_2) : $y_2 = x + \alpha(e-\alpha)$

3) أ) $k'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$

x	0		e		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

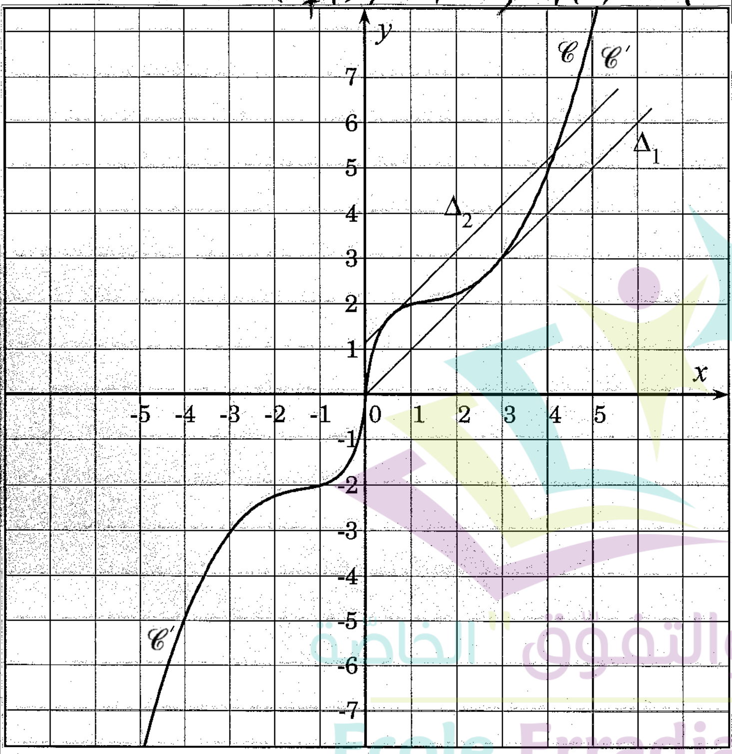
$g(e)\geq 0$ ومنه $g(x)\geq 0$.

ب) $f(x)-x = x\underbrace{(x-e\ln x)}_{k(x)} \geq 0$.
(C) فوق (Δ_1) على $]0,e[\cup]e,+\infty[$.
(C) يمس (Δ_1) عند (e,e) .

لاحظ أن $f(x)-x=0$ لما $x=e$

4) $f''(x) = g'(x) = \frac{2x-e}{x}$ (انعطاف) تنعدم وتغير إشارتها ومنه $A(1,36;2,07)$

5) $f(1)=2$ و $f(5)=8,1$.



6) $h(-x) = -x(|-x|+1-e\ln|-x|) = -x(|x|+1-e\ln|x|) = -h(x)$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ ، $h(-x)=-h(x)$ ومنه h فردية

$x>0$: $|x|=x$ ومنه: $h(x)=f(x)$ ، (C') يطابق (C) ، وأما $x<0$: بما أن h فردية نناظر الجزء المطابق بالنسبة للمبدأ O .

III-1) $u_0=1$ ومنه $1\leq u_0<e$ (محققة)

نفرض أن $0<u_n<e$ ونبرهن صحة $0<u_{n+1}<e$.

لدينا: $1\leq u_n<e$ و f متزايدة ومنه: $f(1)<f(u_n)<f(e)$

أي $1<2\leq u_{n+1}<e$ محققة ومنه: $1\leq u_n<e$ $(n\in\mathbb{N})$

2) من II-3 $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n \geq 0$ ومنه (u_n) متزايدة

3) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ و لدينا: $u_{n+1}=f(u_n)$

l تحقق $f(l)=l$. عند حل هذه المعادلة نجد: $l=e$ أنظر: II-3 ب)

"عبد المطلب"