تصحيح البكالوريا التجريبي 2020 (موضوع 1) "عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $u_2 = \frac{u_1+2}{2} = 1$ ، $u_3 = \frac{2u_2+2}{3} = \frac{4}{3}$ و $u_4 = \frac{3}{2}$

2) أ) $u_n<2$: $n=0$ ، $u_1=0$ ومنه $u_1<2$ (محققة)

نفرض أن $u_n<2$ ونبرهن أن $u_{n+1}<2$. لدينا: $u_n<2$

$nu_n<2n$ ، $nu_n+2<2n+2$ ، $\frac{nu_n+2}{n+1}<\frac{2n+2}{n+1}$

$u_{n+1}<2$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n<2$.

ب) $u_{n+1}-u_n = \frac{nu_n+2}{n+1}-u_n = \frac{nu_n+2-nu_n-u_n}{n+1} = \frac{2-u_n}{n+1}$

لدينا: $u_n<2$ ، $-u_n>-2$ ، $2-u_n>0$ ومنه:

$u_{n+1}-u_n>0$ ، إذن (u_n) متزايدة.

جـ) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ) $v_{n+1}=(n+1)(a-u_{n+1}) = (n+1)\left(a-\frac{nu_n+2}{n+1}\right)$

$v_{n+1}=(n+1)\left(\frac{an+a-nu_n-2}{n+1}\right) = an+a-nu_n-2$

$v_{n+1}-v_n = an+a-nu_n-2-(na-nu_n) = a-2$

ومنه: (v_n) متتالية حسابية أساسها: $r=a-2$ و $v_1=a$.

ب) $v_n = v_1+(n-1)r = a+(n-1)(a-2) = (a-2)n+2$

$v_n=n(a-u_n)$ ومنه: $u_n = a-\frac{v_n}{n}$

الحد العام: $u_n = a-\frac{(a-2)n+2}{n} = 2-\frac{2}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{2}{n}\right) = 2$

جـ) $S_n = \frac{n}{2}(v_1+v_n) = \frac{n}{2}(a+(a-2)n+2) = \frac{n}{2}[(a-2)n+a+2]$

4) لدينا: $u_n = 2-\frac{2}{n}$

$S'_n = u_1+2u_2+3u_3+\dots+nu_n$

$S'_n = \left(2-\frac21\right)+2\left(2-\frac22\right)+3\left(2-\frac23\right)+\dots+n\left(2-\frac2n\right)$

$S'_n = (2-2)+(2\times2-2)+(3\times2-2)+\dots+2n-2$

$S'_n = 2(1+2+3+\dots+n)-2-2-2-\dots-2$

$S'_n = 2\frac{n(n+1)}{2}-2n = n^2+n-2n = n^2-n$

يمكن حساب مجموع متتالية حسابية حدها العام nu_n .

تمرين 2:

1) $X = \{3; 2+a; 1+2a; 3a\}$

$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac16$

$P(X=2+a) = \frac{C_6^2\times C_4^1}{C_{10}^3}=\frac12$

$P(X=1+2a)=\frac{C_6^1\times C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$

$P(X=3a)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$

$E(X)=3\times\frac16+(2+a)\left(\frac12\right)+(1+2a)\left(\frac{3}{10}\right)+3a\times\frac{1}{30}$

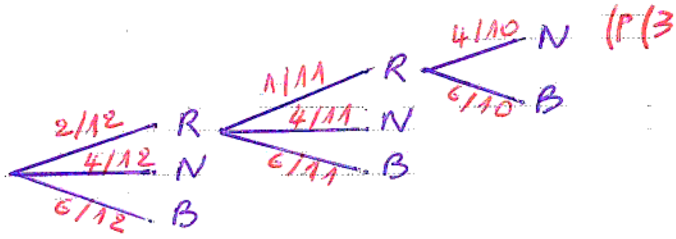
$E(X)=\frac{6a+9}{5}$

2) $[E(X)]^2-9E(X)=0$ أي: $E(X)[E(X)-9]=0$

$E(X)=0$ (مستحيل) أو $E(X)=9$ ومنه:

$\frac{9+6a}{5}=9$ ومنه: $a=6$

3) أ)



ب) $P_1 = \frac{6}{12}+\frac{2}{12}\times\frac{6}{11}+\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{6}{10}=\frac35=0,6$

$P_2 = 1-P_1 = \frac25=0,4$

تمرين 3:

I-1) $z^2-4z+8=0$

$\Delta=-16=16i^2=(4i)^2$

$z_1=2-2i$ و $z_2=2+2i$ (مترافقين)

2) $\begin{cases}2z_1+\bar z_2=6\\ \bar z_1+z_2=3+i\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}2\bar z_1+z_2=6\\ \bar z_1+z_2=3+i\end{cases}$

بالطرح: $\bar z_1=3-i$ ومنه: $z_1=3+i$

$z_2=6-2\bar z_1$ ومنه: $z_2=2i$

II-1) $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-1-3i}{-3+i}=\frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\frac{|z_C-z_B|}{|z_A-z_B|}=\frac{BC}{BA}=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=(\vec{BA},\vec{BC})=\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2-4i}{3-i}=1-i=\sqrt2\, e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

$z_C-z_A=\sqrt2\, e^{i(-\pi/4)}(z_B-z_A)$

ولدينا: $z'-w=re^{i\theta}(z-w)$

ومنه: C هي صورة B بالتشابه المباشر S ، الذي مركزه A ، نسبته $\sqrt2$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$.

3) $z'=az+b$ ، حيث: b هو لاحقة المركز A:

$a=\sqrt2\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)=1-i$ و $\frac{b}{1-a}=z_A$

أي $b=-2$ ومنه: $z'=(1-i)z-2$

4) $z'=(1-i)z-2$ أي: $z'=z-iz-2$

$z'-z=-iz-2$ ومنه: $z'-z=-i(z-2i)$

$\frac{z'-z}{z-2i}=\frac{z'-z}{z-z_A}=-i=e^{i(-\pi/2)}$

$\frac{|z'-z|}{|z-z_A|}=\frac{MM'}{AM}=1$ و $\arg\left(\frac{z'-z}{z-z_A}\right)=(\vec{AM},\vec{MM'})=-\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث AMM' مثلث قائم ومتساوي الساقين

5) $OM'=OM$ تكافئ $|z'|=|z|$

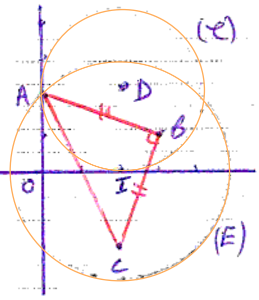
$|(1-i)z-2|=|z|$

$|(1-i)(x+iy)-2|=|x+iy|$

$|(x+y-2)+i(-x+y)|=|x+iy|$

$\sqrt{(x+y-2)^2+(y-x)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$ ، دائرة مركزها $D(2,2)$ ونصف قطرها $DA=2$ ، $(\mathcal{C})$ هي الدائرة التي مركزها D وتشمل A أي نصف قطرها $r=DA=2$



6) $z_I=\frac{z_C+z_D}{2}=2$

صورة D بالتحويل S :

$z'=(1-i)z_D-2=2=z_I$

وبما أن A صامدة، منه صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ هي الدائرة التي مركزها I وتشمل A أي نصف قطرها $IA=\sqrt{2}\,AD=2\sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=2\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\|$

$\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\|=2\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}\|$

$\|2\overrightarrow{MI}+\underbrace{\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}}_{\vec{0}}\|=2\|\overrightarrow{AI}\|$

$MI=AI$

(E) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=AI=2\sqrt{2}$.

تمرين 4 :

1) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x(x-2)(\ln x-2)+x]=+\infty$

$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\cancel{x}[(x-2)(\ln x-2)+1]}{\cancel{x}}=+\infty$

ب) $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين.

$(\mathcal{C})$ يقبل نصف مماس عمودي (يوازي $(y'oy)$)

2) أ) $f'(x)=(2x-2)(\ln x-2)+\frac{1}{x}(x^2-2x)+1$

$f'(x)=2(x-1)(\ln x-2)+(x-1)=(x-1)(2\ln x-3)$

$f'(x)=0$ لما $x=1$ أو $\ln x=\frac{3}{2}$ أي $x=e^{3/2}$.

0		1		$e^{3/2}$	
	+	0	−	0	+

ب) $1\leq x\leq e^{3/2}$: f متناقصة

$x\in]0;1[\cup]e^{3/2};+\infty[$ f متزايدة.

x	0		1		$e^{3/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	3	↘	$-1{,}1$	↗	$+\infty$

3) أ) $f(x)=x$ يعني : $x(x-2)(\ln x-2)=0$

$A(0,0)$ ، $B(2;2)$ و $C(e^2,e^2)$

ب) لدراسة وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ (Δ) ، ندرس إشارة $(f(x)-x)$

x	0		2		e^2		$+\infty$
$x-2$		−	0	+		+	
$\ln x-2$		−		−	0	+	
$f(x)-x$	0	+	0	−	0	+	

$(\mathcal{C})$ أعلى (Δ) لما $x\in]0,2[\cup]e^2,+\infty[$

$(\mathcal{C})$ أسفل (Δ) لما $x\in]2,e^2[$

$(\mathcal{C})$ يقطع (Δ) عند A ، B و C المذكورة سابقا،

4) أ) f مستمرة ومتناقصة على المجال $]3{,}1;3{,}2[$.

$f(3{,}1)\simeq 0{,}138>0$ و $f(3{,}2)\simeq -0{,}014<0$ ؛

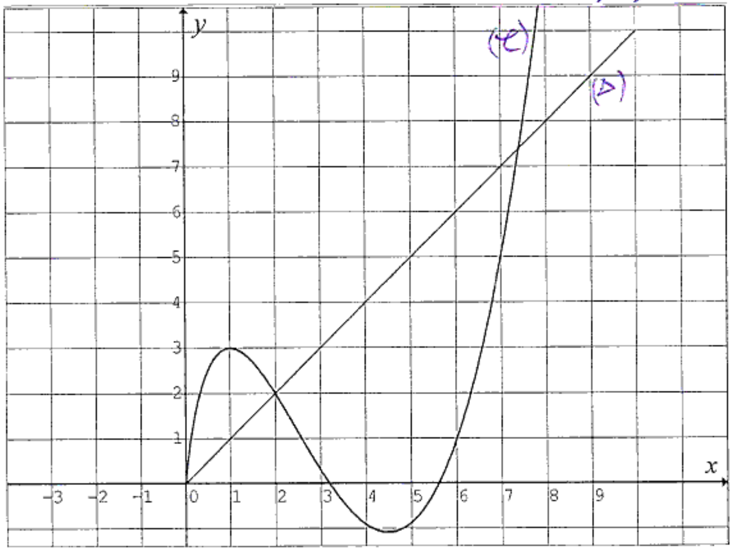
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3{,}1<\alpha<3{,}2$.

f مستمرة ومتزايدة على المجال $]5{,}5;5{,}6[$ ؛

$f(5{,}5)\simeq -0{,}184<0$ و $f(5{,}6)\simeq 0{,}011>0$

ومنه حسب القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $5{,}5<\beta<5{,}6$.

ب) رسم المنحني $(\mathcal{C})$ والمستقيم (Δ) ،



جـ) $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين

لما : $0>f(m)>f(e^{3/2})$ ومنه : $\alpha<m<\beta$

$m\neq e^{3/2}$

5) أ) $g(-x)=((-x)^2-2|-x|)(2-\ln|-x|)-|-x|$

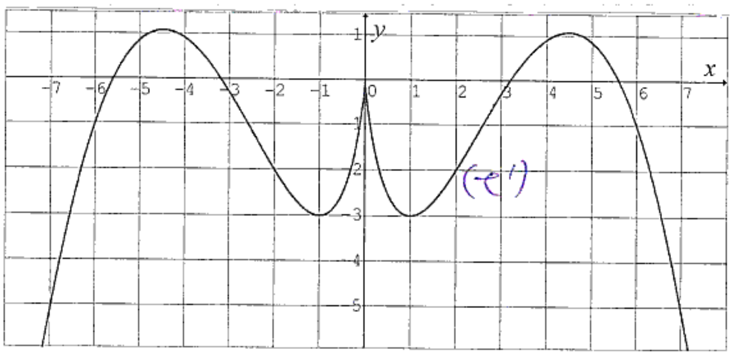
$g(-x)=(x^2-2|x|)(2-\ln|x|)-|x|=g(x)$

ومنه g زوجية.

لما $x\geq0$ ، $|x|=x$ ومنه: $g(x)=(x^2-2x)(2-\ln x)-x$

$g(x)=-[(x^2-2x)(\ln x-2)+x]=-f(x)$

ب) لما $x\geq0$: $g(x)=-f(x)$ ومنه $(\mathcal{C}')$ يناظر $(\mathcal{C})$ بالنسبة لمحور الفواصل ولما $x<0$ ، بما أن g زوجية، فإن $(\mathcal{C}')$ يقبل كمحور تناظر حامل محور التراتيب



تتمة: باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن :

$\int_1^{e^2}(x^2-2x)(\ln x-2)\,dx=\frac{9e^4-2e^2-31}{18}$

هل يعبّر عن المساحة A للحيز المستوي المحدد بـ $(\mathcal{C})$ والمستقيمات $y=x$ ، $x=1$ و $x=e^2$ ؟ علّل إجابتك.

نضع : $\begin{cases}u(x)=\ln x-2\\ v'(x)=x^2-2x\end{cases}$ $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=\frac{x^3}{3}-x^2\end{cases}$

$\int_1^{e^2}(x^2-2x)(\ln x-2)\,dx=\left[(\ln x-2)\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\left(\frac{x^2}{3}-x\right)dx$

$=\left[(\ln x-2)\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right]_1^{e^2}-\left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{2}\right]_1^{e^2}=\frac{9e^4-2e^2-31}{18}$

لا يعبّر : $A=\int_1^{2}(f(x)-x)\,dx+\int_2^{e^2}(x-f(x))\,dx$

"عبد المطلب"

تصحيح البكالوريا التجريبي 2020م موضوع 4

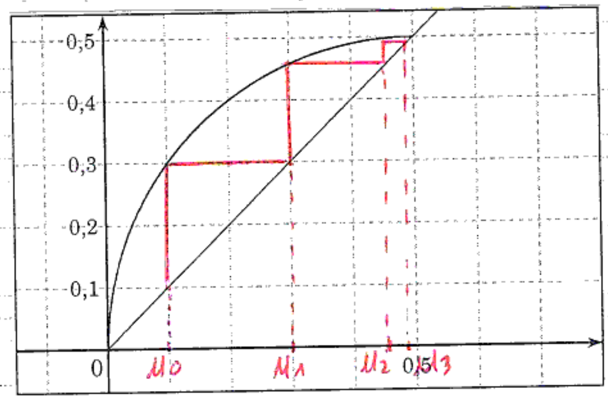
تمرين 1:

1) $f(x)=\sqrt{-x^2+x}$ ومنه: $f'(x)=\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}}\geq 0$

لأن: لما $0\leq x\leq 0,5$ ، $-1\leq -2x\leq 0$ ، $0\leq -2x+1\leq 1$

إذن f متزايدة على $[0;0,5]$.

2) أ)



ب) (u_n) متزايدة لأن $u_0<u_1<u_2<u_3$ ، ومتقاربة نحو 0,5 .

3) أ) $0\leq u_n\leq 0,5$. $n=0$: $u_0=0,1$ (محققة)

نفرض أن $0\leq u_n\leq 0,5$ ، ونبرهن $0\leq u_{n+1}\leq 0,5$

لدينا: $0\leq u_n\leq 0,5$ وبما أن f متزايدة فإن $f(0)\leq f(u_n)\leq f(0,5)$ ، أي $0\leq u_{n+1}\leq 0,5$ ،

ومنه $0\leq u_n\leq 0,5$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

ب) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{\left(\sqrt{-u_n^2+u_n}-u_n\right)\left(\sqrt{-u_n^2+u_n}+u_n\right)}{\left(\sqrt{-u_n^2+u_n}+u_n\right)}$

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(-2u_n+1)}{\sqrt{-u_n^2+u_n}+u_n}\geq 0$ لأن: لما $0\leq u_n\leq 0,5$ ، $0\leq -2u_n+1\leq 1$

ومنه (u_n) متزايدة

جـ) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ ومنه $\sqrt{-\ell^2+\ell}=\ell$

بالتربيع: $2\ell^2-\ell=0$. إما $\ell=0$ (مرفوض) لأنها متزايدة أو $\ell=\frac{1}{2}$

4) لنبين أن (v_n) متناقصة: لدينا: $u_{n+1}\geq u_n$

$2u_{n+1}\geq 2u_n$ ، $2u_{n+1}+3\geq 2u_n+3$ ومنه $\dfrac{1}{2u_{n+1}+3}\leq\dfrac{1}{2u_n+3}$

$\dfrac{2}{2u_{n+1}+3}\leq\dfrac{2}{2u_n+3}$ يعني $v_{n+1}\leq v_n$ ومنه (v_n) متناقصة

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{2u_n+3}=\frac{1}{2}$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$ ،

(u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ولهما نفس النهاية إذن متجاورتان

تمرين 2:

1) أ) العبارة المركبة للدوران r : $z'-w=e^{i\theta}(z-w)$

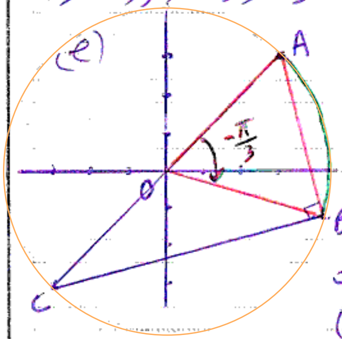
بما أن B هي صورة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ إذن: $z_B-z_O=e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z_A-z_O)$ ومنه:

$z_B=e^{i(-\frac{\pi}{3})}z_A$ أي: $z_B/z_A=e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

$\dfrac{|z_B|}{|z_A|}=\dfrac{OB}{OA}=1$ و $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{3}$

ومنه المثلث ABO متقايس الأضلاع.

ب) B هي صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$



2) أ) $z_A=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_B=e^{i(-\frac{\pi}{3})}\times z_A$

$=e^{i(-\frac{\pi}{3})}\times 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

ومنه: $z_B=3\sqrt{2}e^{i(\frac{-\pi}{12})}$

أو: $\arg(z_B)=(\vec{u};\overrightarrow{OB})=$

$(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{12}$

و $|z_B|=OB=OA$

ب) $z_B=(3+3i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2}$

$z_B=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2\times 3\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}=\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2\times 3\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

ومنه: $\sin\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

جـ) $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{3}}$ و $-1=e^{i\pi}$

$\dfrac{n\pi}{3}=\pi+2k\pi$ ومنه: $n=3+6k$ $(k\in\mathbb{N})$

3) أ) $r\circ r$: $z'=e^{i(-\frac{\pi}{3})}\times e^{i(-\frac{\pi}{3})}z=e^{i(-\frac{2\pi}{3})}z$

$r\circ r\circ r$: $z'=e^{i(-2\pi/3)}\times e^{i(-\frac{\pi}{3})}z=e^{i(-\pi)}z$

ومنه: $z_C=e^{i\pi}z_A=-z_A$

ب) $OA=OB=OC$ ؛ دائرة مركزها O و $r=3\sqrt{2}$.

جـ) بما أن C نظيرة A بالنسبة لـ O ، فإن $[AC]$ هو قطر الدائرة، إذن المثلث ABC قائم في B.

4) $z_C=-z_A$ ومنه: $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right)^2=\pi+2k\pi$

$2\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\pi+2k\pi$ ومنه $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

(Γ) هي دائرة قطرها $[AC]$ ماعدا A و C.

تمرين 3:

	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8

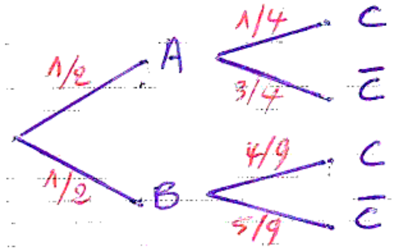
1) قيم المتغير العشوائي X هي: $\{8,7,6,5,4,3,2,1\}$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$E(X)=\frac{9}{2}=4,5$

$V(X)=\frac{143}{6}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{43}{12}$

2)



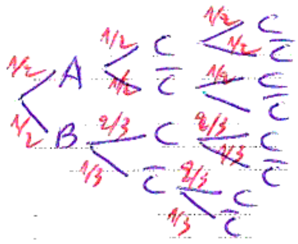
$P(A\cap C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

$P(A\cap C)=\frac{1}{8}$

$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=\frac{1}{8}+\frac{8}{9}=\frac{25}{72}$

$P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{1/8}{25/72}=\frac{9}{25}$

يمكن استعمال الشجرة التالية:



تمرين 4:

I. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ لأن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} e^{-1/x}=1$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} g(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} e^{-1/x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{t\to-\infty} t^2e^t=0$

2) $g'(x)=\frac{-2}{x^3}e^{-1/x}+\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\frac{1}{x^2}=e^{-1/x}\left(\frac{-2x+1}{x^4}\right)$

x	$-\infty$		a		0		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	+	+	‖	+	0	−	
$g(x)$	0	↗	1	↗ $+\infty$	‖ 0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

3) g مستمرة ومتزايدة على $]-1,5\,;\,-1,4[$

$g(-1,5)\simeq 0,87<1$ و $g(-1,4)\simeq 1,04>1$، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة: $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا
من جدول التغيرات لما $a\leqslant x<0$ فإن $g(x)\geqslant 1$.

II. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} e^{-1/x}=0$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=+\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ (C).

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x-2]=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-1/x}-1)=0$

كذلك عند $-\infty$، ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C).
(C) فوق (Δ) لما $f(x)-y>0$ أي $e^{-1/x}-1>0$
$e^{-1/x}>1$ ، $\frac{-1}{x}>0$ ، $\frac{1}{x}<0$ ومنه $x<0$.

3) أ) $f'(x)=-1+\frac{1}{x^2}e^{-1/x}=g(x)-1$

لما $a\leqslant x<0$، $f'(x)\geqslant 0$
ولما $x\in]-\infty\,;a[\cup]0\,;+\infty[$، $f'(x)<0$.

x	$-\infty$		a		0		b		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖		−		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(a)$	↗ $+\infty$	‖ 1	↘	0	↘	$-\infty$

ب) $f''(x)=g'(x)=\left(\frac{-2x+1}{x^4}\right)e^{-1/x}$ (نقطة انعطاف)
تنعدم وتغير إشارتها. النقطة هي $(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}+e^{-2})$

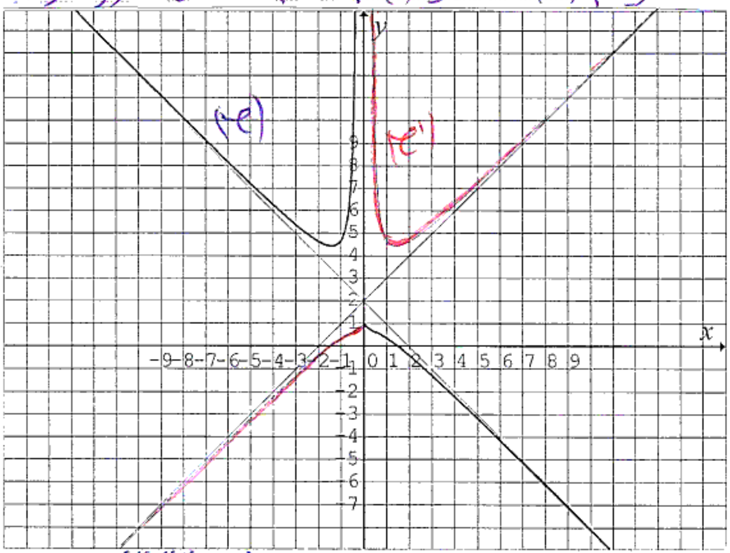
4) أ) f مستمرة ومتناقصة على $]1,5\,;1,6[$،
$f(1,5)\simeq 0,01>0$ و $f(1,6)\simeq -0,06<0$، ومنه
حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.
$f(x)\leqslant 0$ لما $x\geqslant b$ و $f(x)>0$ لما $x\in]-\infty,0[\cup]0\,;b[$.

ب) لدينا $g(a)=1$ أي $\frac{1}{a^2}e^{-1/a}=1$ ومنه: $e^{-1/a}=a^2$
إذن $f(a)=-a+1+e^{-1/a}=-a+1+a^2$

$-1,5<a<-1,4$ ، $1,4<-a<1,5$ ، $1,96<a^2<2,25$
$3,36<a^2-a<3,75$ ومنه: $4,36<a^2-a+1<4,75$

$4,36<f(\alpha)<4,75$

جـ) رسم (C') نناظر (C) بالنسبة لحامل محور التراتيب



5) أ) $n=0$: $u_0=2$ $b<u_0\leqslant 2$ (محققة)
نفرض أن $b<u_n\leqslant 2$ ونبرهن $b<u_{n+1}\leqslant 2$.
$b<u_n\leqslant 2$ ، $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{u_n}<\frac{1}{b}$ ؛ $-\frac{1}{b}<\frac{-1}{u_n}\leqslant-\frac{1}{2}$
$e^{-1/b}<e^{-1/u_n}\leqslant e^{-1/2}$ ، $e^{-1/b}+1<1+e^{-1/u_n}\leqslant 1+e^{-1/2}$
لدينا: $1+e^{-1/2}<2$ و $f(b)=0$ ومنه: $b<u_{n+1}\leqslant 2$
إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $b<u_n\leqslant 2$.

ب) $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$ ولدينا لما $x>b$ فإن $f(x)<0$
ومنه: لما $b<u_n\leqslant 2$ فإن $f(u_n)<0$.
إذن (u_n) متناقصة تماما

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة
$\lim\limits_{+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell$ أي $f(\ell)=0$ ومنه $\ell=b$

تتمة:

1) بين أن: من أجل كل $x<-2$ ، $-x+2<f(x)<-x+3$
2) لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) و
المستقيمات: $y=0$ ، $x=-3$ و $x=-2$ بين أن
$4,5<A<5,5$

1) سابقا لما $x<0$: $f(x)>-x+2$
لبيان أن $f(x)<-x+3$ أي $-x+1+e^{-1/x}+x-3<0$
$e^{-1/x}-2<0$. لدينا: $x<-2$ ، $\frac{1}{x}>-\frac{1}{2}$ ،
$-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$ ، $e^{-1/x}<e^{1/2}$ ومنه $e^{-1/x}-2<e^{1/2}-2<0$

2) لدينا $f(x)>0$ لما $x<0$: $A=\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx$
$-x+2<f(x)<-x+3$ ومنه:
$\int(-x+2)\,dx<\int f(x)\,dx<\int(-x+3)\,dx$
$\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-3}^{-2}<A<\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{-2}$ ومنه $4,5<A<5,5$