المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) — دورة: ماي 2019

الشعبة: علوم تجريبية — إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{{u_n}^2-3}{2(u_n-2)}$.

1- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-3=\dfrac{(u_n-3)^2}{2(u_n-2)}$.

ب) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq 3$.

ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، واستنتج أنّها متقاربة.

2- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-3\leq\dfrac{1}{2}(u_n-3)$.

ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n-3\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

3- من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$. بيّن أنّ $S_n\leq 3n+5-2^{-n}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية: $z^2-6\sqrt{2}z+24=0$.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B من هذا المستوي لاحقتيهما العددين المركبين: $z_A=3\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ و $z_B=3\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

1- أ) اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة التالية: z_A ، z_B و $\dfrac{z_A}{z_B}$، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: ${z_A}^n={z_B}^n$.

2- أ) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OAB.

ب) بيّن أنّ النقط A، B و O تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$، يطلب تعيين مركزها، نصف قطرها ومساحتها s.

3- ليكن التحاكي h الذي مركزه النقطة G ونسبته $-\dfrac{1}{2}$.

أ) بيّن أنّ العبارة المركبة لهذا التحاكي هي $z'=-\dfrac{1}{2}z+3\sqrt{2}$.

ب) استنتج $(\mathscr{C}')$ صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ بالتحاكي h، واحسب مساحتها s'.

جـ) عيّن z_C لاحقة النقطة C حتى تكون B صورة C بالتحويل h. ماذا يمكن قوله عن النقاط B، C و G؟

د) تحقّق أنّ $z_A=z_B+z_C$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي OCAB.

التمرين الثالث: (**04** نقاط)

الفضاء مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;-1;-2)$، $C(1;0;0)$ و $D\left(\frac{5}{6};\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)$. ليكن $\mathscr{P}_1$ المستوي من هذا الفضاء المعرّف بمعادلته الديكارتية $x+2y-z=3$ ، و $\mathscr{P}_2$ المستوي المعرّف بمعادلته الديكارتية $x+y=2$.

1- بيّن أنّ المستويين $\mathscr{P}_1$ و $\mathscr{P}_2$ يتقاطعان. أعط تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما (d).

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (BC). بيّن أنّ المستقيمين (d) و(BC) ليسا من المستوي نفسه.

3- بيّن أنّ النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC). احسب الطول AD.

4- أ) لتكن (E) مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AD}=\frac{5}{6}$. بيّن أنّ (E) تكافئ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD}=0$.

ب) بيّن أنّ المجموعة (E) هي المستوي $\mathscr{P}_3$ حيث معادلته الديكارتية: $x+5y-2z=6$.

5- استنتج مما سبق تقاطع المستويات $\mathscr{P}_1$ ، $\mathscr{P}_2$ و $\mathscr{P}_3$.

التمرين الرابع: (**07** نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $D_f=]\ln 2;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\ln\left(\frac{e^x}{2e^x-4}\right)$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\ln 2} f(x)$ مع تفسير النتيجة بيانيا.

2- أ) أثبت أنّه من أجل كل x من D_f، فإنّ $f(x)=x-\ln 2+\ln\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right)$.

ب) استنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ يطلب كتابة معادلته.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقع فوق المستقيم المقارب المائل (Δ).

3- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $D_g=]\ln 2;+\infty[$ بـ: $g(x)=f(x)-x$.

أ) أثبت أنّ $g(x)\leq 0$ من أجل $x\geq 2\ln 2$.

ب) استنتج وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ') ذي المعادلة $y=x$.

4- أ) أثبت أنّه من أجل كل x من D_f، فإنّ $f'(x)=\frac{e^x-4}{e^x-2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) ارسم المستقيمين (Δ) و(Δ')،والمنحني $(\mathscr{C})$.

5- أ) استنتج مما سبق أنّ: من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 2\ln 2$، فإنّ $x-\ln 2\leq f(x)\leq x$.

ب) استنتج حصرا لمساحة الحيّز $\mathscr{A}$ المحدّدة بالمنحني$(\mathscr{C})$، والمستقيمات: $y=0$، $x=\frac{3}{2}$ و $x=2$.

6- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\ln 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\ln 2\leq u_n\leq \ln 6$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n). استنتج أنّها متقاربة ثم احسب نهايتها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n+4}u_n$.

1- احسب الحدود: u_1، u_2 و u_3.

2- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، واستنتج أنّها متقاربة.

3- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=(n+1)u_n$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم احسب حدّها الأوّل v_0.

ب) اكتب عبارة u_n بدلالة n، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4- أ) احسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $\mathrm{S}_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $\mathrm{P}_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $\mathrm{P}'_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$. بيّن أنّ $\mathrm{P}'_n=\frac{\mathrm{P}_n}{(n+1)!}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A، B و C من هذا المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_\mathrm{A}=2+2i$ ، $z_\mathrm{B}=-2+6i$ و $z_\mathrm{C}=z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}$.

1- أ) احسب $\frac{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ACB.

ب) احسب $\frac{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}}$، ثم استنتج طبيعة الرباعي OACB.

جـ) بيّن أنّ العدد $(z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}+z_\mathrm{C})^{2019}$ تخيلي صرف، ثم احسبه.

2- لتكن النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة B.

أ) بيّن أنّ لاحقة النقطة D هي $z_\mathrm{D}=-4+4i$.

ب) بيّن أنّ D هي صورة C بالتشابه المباشر الذي مركزه O، نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

3- أ) بيّن أنّ لاحقة النقطة E حتى يكون الرباعي OECD مربع هي $z_\mathrm{E}=4+4i$.

ب) بيّن أنّ المجموعة (Γ_1) للنقط M من المستوي التي تحقّق $|z|=|z+\overline{z_\mathrm{D}}|$ هي المستقيم (AB).

4- أ) بيّن أنّ النقطة A هي مرجح الجملة: $\{(\mathrm{C}\text{، }-1);(\mathrm{D}\text{، }1);(\mathrm{E}\text{، }2)\}$.

ب) عيّن المجموعة (Γ_2) للنقط M من المستوي التي تحقّق: $\left\|-\overrightarrow{M\mathrm{C}}+\overrightarrow{M\mathrm{D}}+2\overrightarrow{M\mathrm{E}}\right\|=\left\|\overrightarrow{M\mathrm{E}}-\overrightarrow{M\mathrm{O}}\right\|$.

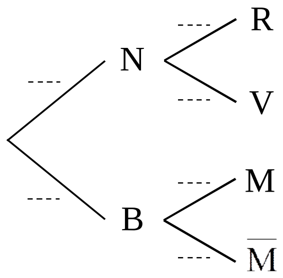
التمرين الثالث: (04 نقاط)

1- يحتوي كيس على 6 كريات حمراء (R) و 4 كريات خضراء (V). نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين.

احسب احتمال سحب كريتين من نفس اللون.

2- زهرة نرد مكعبة ومتوازنة لها وجه لونه أسود، وباقي الأوجه لونها أبيض. ما احتمال ظهور الوجه الأبيض؟

3- نرمي هذا النرد. إذا ظهر الوجه الأسود، نسحب كرة واحدة من الكيس، وإذا ظهر الوجه الأبيض، نسحب كرتين في آن واحد من الكيس. السحب يكون بطريقة عشوائية.



نسمي الحادثة N: ظهور الوجه الأسود للنرد.

نسمي الحادثة B: ظهور الوجه الأبيض للنرد.

نسمي الحادثة M: سحب كريتين من الكيس من نفس اللون.

أ) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه الوضعية.

ب) احسب الاحتمال $p(\mathrm{M})$.

ج) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها عند السحب من الكيس.

احسب $p(X=2)$، واستنتج حساب $p(X=1)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ:
$$\begin{cases} f(x)=xe^{x+1}+1 & x\leq -1 \\ f(x)=e^{-x-1}+x & x>-1 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

1- **أ)** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ مع تفسير النتيجة بيانيا.

2- بيّن أنّ $0=\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}}\dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h}$. ماذا تستنتج؟ نذكّر: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$.

3- **أ)** بيّن أنّه من أجل كل عدد $x\leq-1$ فإنّ $f'(x)\leq0$ ، ومن أجل كل عدد $x>-1$ فإنّ $f'(x)>0$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

4- **أ)** بيّن أنّه من أجل كل $x>-1$ يوجد مماس (Δ) لـ $(\mathscr{C})$ يشمل النقطة $(1;1)$. لا يطلب كتابة معادلة (Δ).

ب) ارسم المماس (Δ) ، المنحني $(\mathscr{C})$ والمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $-f$ في نفس المعلم.

5- **أ)** باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ $\int_{-3}^{-1}xe^{x+1}dx=-2+4e^{-2}$.

ب) احسب المساحة $\mathscr{A}$ للحيز المستوي المحدّد بين المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$، والمستقيمين: $x=-3$ و $x=-1$.

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

انتهى الموضوع الثاني