# تصحيح إختبار الفصل الأول 2021م

"عبد المطلب"

## تمرين 1:

1) $P(A) = \frac{C_3^1 \times C_8^1}{C_{12}^2} = \frac{4}{11}$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_2^1 C_4^1 + C_2^2}{C_{12}^2} = 1 - \frac{3}{22} = \frac{19}{22}$

أو $P(B) = \frac{C_{10}^2 + C_2^1 \times C_{10}^1}{C_{12}^2}$ (أعمر)

2) أ) $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X=4) = \frac{C_2^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{7}{33}$

$P(X=6) = \frac{C_2^2 + C_4^2 + C_2^2 + C_3^2}{66} = \frac{1}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \frac{C_3^1 \times C_1^1}{66} = \frac{21}{22}$

أو: $P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{66}$

ب) قانون الاحتمال للمتغير $X$:

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{4}{33}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{7}{33}$ | $\frac{9}{22}$ | $\frac{1}{6}$ |

$E(X) = 2 \times \frac{4}{33} + \frac{3}{11} + 4 \times \frac{7}{33} + 5 \times \frac{9}{22} + \frac{6}{6} = \frac{97}{22} = 4,409$

3) أ) $P_n = \frac{3^n}{12^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$P_n \geq 0,002$ يعني: $\frac{1}{4^n} \geq 0,002$ ، أي $4^n \leq 500$

$\ln 4^n \leq \ln 500$ ، $n \leq \frac{\ln 500}{\ln 4}$ ، $n \leq 4,48$

ومنه: $n = 4$

ب) $P = n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n = n\left(\frac{3^{n-1}}{4^n}\right)$

أو: $P = n\left(\frac{1^1 \times 3^{n-1}}{12^n}\right)$

## تمرين 2:

1) أ) $n=0$ : $U_0 = -3$ ومنه $-3 \leq U_0 < -2$ (محققة)

نفرض أن: $-3 \leq U_n < -2$ ونبرهن صحة: $-3 \leq U_{n+1} < -2$

لدينا: $-3 \leq U_n < -2$ ، $-6 \leq 2U_n < -4$ ،

$2 \leq 2U_n + 8 < 4$ ; $\sqrt{2} \leq \sqrt{2U_n+8} < 2$

$\sqrt{2} - 4 \leq \sqrt{2U_n+8} - 4 < -2$ و $-3 \leq \sqrt{2} - 4$

ومنه: $-3 \leq U_{n+1} < -2$ إذن $-3 \leq U_n < -2 : \forall n \in \mathbb{N}$

ب) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n+8} - 4 - U_n = \frac{(\sqrt{2U_n+8} - 4 - U_n)(\sqrt{2U_n+8} + 4 + U_n)}{\sqrt{2U_n+8} + 4 + U_n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 8 - (4+U_n)^2}{\sqrt{2U_n+8} + 4 + U_n} = \frac{2(U_n+4) - (U_n+4)^2}{\sqrt{2U_n+8} + 4 + U_n}$

$U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n+2)(U_n+4)}{\sqrt{2U_n+8} + 4 + U_n} > 0$

لأن: $-3 \leq U_n < -2$ ومنه: $1 \leq U_n + 4 < 2$ (موجب)

و: $-1 \leq U_n + 2 < 0$ (سالب)

إذن $(U_n)$ متزايدة تماما.

$U_n$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

2) أ) لدينا: $U_{n+1} + 2 = \sqrt{2U_n+8} - 2 = \frac{(\sqrt{2U_n+8} - 2)(\sqrt{2U_n+8} + 2)}{\sqrt{2U_n+8} + 2}$

$$U_{n+1} + 2 = \frac{2(U_n+2)}{\sqrt{2U_n+8} + 2}$$

إذن: $U_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(U_n+2)$ تكافئ:

$$\frac{2(U_n+2)}{\sqrt{2U_n+8} + 2} \geq (2-\sqrt{2})(U_n+2)$$

$U_n + 2 < 0$

أي: $\frac{2}{\sqrt{2U_n+8} + 2} \leq 2 - \sqrt{2}$

لدينا سابقا: $\sqrt{2} \leq \sqrt{2U_n+8} < 2$ ومنه:

$2 + \sqrt{2} \leq \sqrt{2U_n+8} + 2 < 4$ وعند الاستعمال المقلوب ثم نضرب في 2.

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{\sqrt{2U_n+8} + 2} \leq \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

لدينا: $\frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$

ومنه: $\frac{2}{\sqrt{2U_n+8} + 2} \leq 2 - \sqrt{2}$ أي $U_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(U_n+2)$

ب) $n=0$ : $0 > U_0 + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^0$ أي $0 > -1 \geq -1$ (محققة)

نفرض أن: $0 > U_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n$

ونبرهن صحة: $0 > U_{n+1} + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$

لدينا: $(2-\sqrt{2}) \times \left[0 > U_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n\right]$

$$0 > (2-\sqrt{2})(U_n+2) \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$$

وبما أن: $U_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(U_n+2)$

ومنه: $0 > U_{n+1} + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$ .

إذن $\forall n \in \mathbb{N}$ : $0 > U_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n$

لدينا: $-1 < 2 - \sqrt{2} < 1$ ومنه: $\lim\limits_{n \to +\infty} (2-\sqrt{2})^n = 0$

باستعمال مبرهنة الحصر: $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + 2) = 0$

ومنه: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -2$

3) أ) $V_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{U_{n+1}+4}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{\sqrt{2U_n+8}}{2}\right)$

$V_{n+1} = \frac{1}{2 \times 2^n} \ln\left(\frac{2U_n+8}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{U_n+4}{2}\right) = \frac{1}{4} V_n$

ومنه $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و $V_0 = -\ln 2$

$$V_n = V_0 q^n = -\ln 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ب) $\ln\left(\frac{U_n+4}{2}\right) = 2^n V_n$ ومنه: $(U_n + 4) = 2e^{2^n \cdot V_n}$

$(U_n + 4) = 2e^{2^n\left(\frac{-\ln 2}{4^n}\right)} = 2\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}$

$P_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0}} \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^1}} \times \dots \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n}}$

$f'(x)=\frac{x^2-2x-xe^{-x}}{(x-1)^2}=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$

f متزايدة تماما على: $x\in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[$

f متناقصة تماما على: $x\in]0;1[\cup]1;\alpha[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

ب) $y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$ يشمل $A(1;0)$:

$$0=\frac{\beta^2-2\beta-\beta e^{-\beta}}{(\beta-1)^2}(1-\beta)+\beta+\frac{e^{-\beta}+1}{\beta-1}$$

$$\frac{-\beta^2+2\beta+\beta e^{-\beta}+e^{-\beta}+1}{\beta-1}+\beta=0$$

ومنه: $\frac{\beta+\beta e^{-\beta}+e^{-\beta}+1}{\beta-1}=0$ : $(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$

ومنه $(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$ إذا كان $\beta=-1$ لأن $e^{-\beta}+1>0$

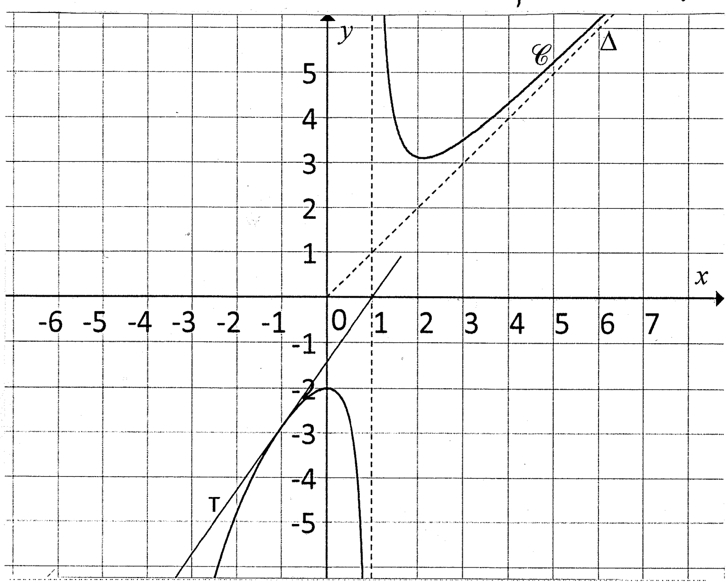
$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=\frac{3+e}{4}(x+1)-\frac{3+e}{2}=\frac{3+e}{4}(x-1)$

3) أ) لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه: $e^{-\alpha}=\alpha-2$ ولدينا: $f(\alpha)=\alpha+\frac{e^{-\alpha}+1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha)=\alpha+\frac{\alpha-2+1}{\alpha-1}=\alpha+1$$

$2,1<\alpha<2,2$ و $3,1<\alpha+1<3,2$ ومنه $3,1<f(\alpha)<3,2$

ب) $f(-2)\simeq-4,8$




4) أ) $f_p(x)-f_q(x)=x+\frac{e^{-x}+p}{x-1}-x-\frac{e^{-x}+q}{x-1}$

$$f_p(x)-f_q(x)=\frac{p-q}{x-1}$$

لما $p<q$ ومنه $(p-q)<0$.

لما $x<1$: $(C_p)$ أعلى $(C_q)$ ولما $x>1$: $(C_p)$ أسفل $(C_q)$

ب) $(x-1)f'_m(x)+x(f_m(x)-1)=x^2$

$$(x-1)\left(1+\frac{-xe^{-x}-m}{(x-1)^2}\right)+x\left(x-1+\frac{e^{-x}+m}{x-1}\right)=x^2$$

$$x-1+\frac{-xe^{-x}-m}{x-1}-x+\frac{xe^{-x}+mx}{x-1}=0$$

$$-1+\frac{m(x-1)}{x-1}=0$$

ومنه $m-1=0$ ومنه $m=1$

"عبدالمطلب"

$$P_n=2^{n+1}\left(\frac12\right)^{\left(\frac{1-(\frac12)^{n+1}}{1-\frac12}\right)}=2^{n+1}\left(\frac12\right)^{2-2^{-n}}=2^{n-1+2^{-n}}$$

## تمرين 3:

1) $Z=\frac{iz+5}{z+i}=\frac{i(x+iy)+5}{x+iy+i}=\frac{-y+5+ix}{x+i(y+1)}$

$$Z=\frac{(-y+5+ix)(x-i(y+1))}{(x+i(y+1))(x-i(y+1))}=\frac{6x}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}$$

2) Z تخيليا صرفا إذا كان: $6x=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$

ومنه $E_1$ مستقيم معادلته $x=0$ ماعدا $(0;-1)$

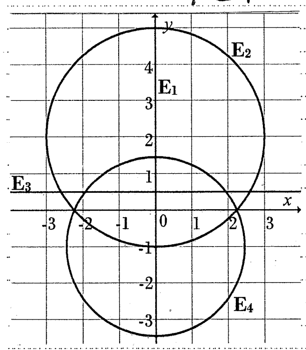
3) Z حقيقيا لما: $x^2+y^2-4y-5=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$

$(x-0)^2+(y-2)^2=9$. ومنه $E_2$ دائرة مركزها $\Omega(0;2)$

ونصف قطرها $r=3$ باستثناء النقطة $(0;-1)$.

4) $|Z+i|=\left|\frac{iz+5}{z+i}+i\right|=\left|\frac{2iz+4}{z+i}\right|=2\left|\frac{iz+2}{z+i}\right|$

إذن: $|Z+i|=2$ لما: $\left|\frac{iz+2}{z+i}\right|=1$ أي: $|iz+2|=|z+i|$




$$|-y+2+ix|=|x+i(y+1)|$$

$$(-y+2)^2+x^2=x^2+(y+1)^2$$

ومنه: $6y=3$. $E_3$ مستقيم معادلته $y=\frac12$

5) $Z=\bar z$ أي: $\frac{iz+5}{z+i}=\bar z$

$$z\bar z+i(\bar z-z)-5=0$$

$$(x-0)^2+(y+1)^2=6$$

$E_4$ دائرة مركزها $\Omega'(0;-1)$ ونصف قطرها $r'=\sqrt6$.

## تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}[x(x-2-e^{-x})]=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}[x(x-2-e^{-x})]=+\infty$

2) $g'(x)=(x-2-e^{-x})+(1+e^{-x})x=2x-2+e^{-x}(x-1)$

$g'(x)=(x-1)(e^{-x}+2)$. إشارتها من إشارة $(x-1)$ لأن $(e^{-x}+2)>0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | $0$ | | |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | $1-\frac1e$ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

3) $g(0)=0$ ولدينا g مستمرة ومتزايدة، $g(2,2)\simeq0,2>0$، $g(2,1)\simeq-0,05<0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $2,1<\alpha<2,2$.

إشارة $g(x)$:

| | | $0$ | | $\alpha$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

II-1) أ) $\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=+\infty$

(C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$.

ب) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^{-x}+1}{x-1}\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{x\left(-\frac{e^{-x}}{-x}+\frac1x\right)}{x\left(1-\frac1x\right)}\right]=-\infty$$

جـ) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-1}{x-1}=0$

(C) يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ معادلته $y=x$ عند $+\infty$

2) أ) $f'(x)=1+\frac{-e^{-x}(x-1)-e^{-x}-1}{(x-1)^2}$