تصحيح البكالوريا التجريبي 2021م

الموضوع الأول "عبد المطلب"

تمرين 1:

1) أ) $2 \le u_n \le 5$ ؛ $n=0$: $u_0 = 2$ ومنه $2 \le u_0 \le 5$.

نفرض أن $2 \le u_n \le 5$ ونبرهن أن $2 \le u_{n+1} \le 5$.

لدينا: $2 \le u_n \le 5$ ، $\frac{1}{5} \le \frac{1}{u_n} \le \frac{1}{2}$ ؛ $-\frac{5}{2} \le \frac{-5}{u_n} \le \frac{-5}{5}$

$2 \le \frac{7}{2} \le 6-\frac{5}{u_n} \le 5$ ومنه: $2 \le u_{n+1} \le 5$.

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $2 \le u_n \le 5$.

$5 \le v_n \le 8$ ؛ $n=0$: $v_0 = 8$ ومنه: $5 \le v_0 \le 8$.

نفرض أن $5 \le v_n \le 8$ ونبرهن $5 \le v_{n+1} \le 8$.

لدينا: $5 \le v_n \le 8$ ، $\frac{1}{8} \le \frac{1}{v_n} \le \frac{1}{5}$ ؛ $-\frac{5}{5} \le \frac{-5}{v_n} \le \frac{-5}{8}$

$5 \le 6-\frac{5}{v_n} \le \frac{43}{8} \le 8$ ومنه: $5 \le v_{n+1} \le 8$.

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $5 \le v_n \le 8$.

ب) $u_{n+1}-u_n = 6-\frac{5}{u_n}-u_n = -\frac{(u_n-1)(u_n-5)}{u_n} > 0$

لأن $u_n-5<0$ و $u_n-1>0$ ومنه: (u_n) متزايدة تماما

$v_{n+1}-v_n = 6-\frac{5}{v_n}-v_n = -\frac{(v_n-1)(v_n-5)}{v_n} < 0$

لأن $v_n-5>0$ و $v_n-1>0$ ومنه: (v_n) متناقصة تماما

(u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

(v_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

2) أ) $v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{5}{u_n}-\frac{5}{v_n} = \frac{5(v_n-u_n)}{u_n\cdot v_n}$

$2 \le u_n \le 5$ و $5 \le v_n \le 8$ ومنه: $10 \le u_n\cdot v_n \le 40$

$\frac{1}{40} \le \frac{1}{u_n\cdot v_n} \le \frac{1}{10}$ ومنه: $\frac{5(v_n-u_n)}{u_n\cdot v_n} \le \frac{5(v_n-u_n)}{10}$

$(v_n \ge u_n)$ إذن: $v_{n+1}-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n-u_n)$

ب) $n=0$: $v_0-u_0 = 6$ ومنه: $0 \le v_0-u_0 \le 6$

نفرض أن $0 \le v_n-u_n \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ونبرهن أن $0 \le v_{n+1}-u_{n+1} \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

لدينا: $0 \le v_n-u_n \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ نضرب في $\frac{1}{2}$ ؛

$0 \le \frac{1}{2}(v_n-u_n) \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ ولدينا: $v_{n+1}-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n-u_n)$

ومنه: $0 \le v_{n+1}-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n-u_n) \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ أي أن

$0 \le v_{n+1}-u_{n+1} \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}$ $0 \le v_n-u_n \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ ومنه حسب مبرهنة الحصر $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$

3) أ) $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}-5}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{6u_n-5}{u_n}-5}{\frac{6u_n-5}{u_n}-1}$

$w_{n+1} = \frac{u_n-5}{5(u_n-1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{u_n-5}{u_n-1}\right) = \frac{1}{5}w_n$

ومنه (w_n) م.ه ، $q = \frac{1}{5}$ و $w_0 = -3$.

ب) $w_n = w_0\cdot q^n = -3\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$w_n = \frac{u_n-5}{u_n-1}$ ، $w_n u_n - w_n = u_n - 5$ ،

$u_n(w_n-1) = w_n-5$ ومنه: $u_n = \frac{w_n-5}{w_n-1}$

$u_n = \frac{-3\left(\frac{1}{5}\right)^n-5}{-3\left(\frac{1}{5}\right)^n-1} = \frac{3\left(\frac{1}{5}\right)^n+5}{3\left(\frac{1}{5}\right)^n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 5$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty} v_n = 5$

ج) $w_n = \frac{u_n-5}{u_n-1} = 1-\frac{4}{u_n-1}$ ومنه: $\frac{1}{u_n-1} = \frac{1-w_n}{4}$

$\frac{5^n}{u_n-1} = \frac{5^n(1-w_n)}{4} = \frac{5^n-5^n w_n}{4} = \frac{5^n+3}{4}$

$S_n = \frac{5^0+3}{4}+\frac{5^1+3}{4}+\dots+\frac{5^n+3}{4}$

$S_n = \frac{5^0+5^1+\dots+5^n+3+\dots+3}{4} = \frac{\frac{5^{n+1}-1}{5-1}+3(n+1)}{4}$

في الأخير: $S_n = \frac{5^{n+1}+12n+11}{16}$

تمرين 2:

1) أ) $P(A) = \frac{C_6^2+C_9^2}{C_{15}^2} = \frac{17}{35}$

$P(B) = \frac{C_2^2+C_4^2+C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{17}{105}$

$P(A\cap B) = \frac{C_3^2+C_4^2}{C_{15}^2} = \frac{3}{35}$

$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B)$

$= 1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right) = \frac{46}{105}$

$P(A\cap\overline{B}) = P(A)-P(A\cap B) = \frac{2}{5}$

ب) الحادثة العكسية هي عدم وجود 0 و 3 أو 6.

$P(C) = 1-\frac{C_8^2}{C_{15}^2} = 1-\frac{4}{15} = \frac{11}{15}$

2) أ) $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$P(X=2) = \frac{C_4^1\cdot C_1^1+C_5^1\cdot C_2^1+C_1^1\times C_4^1+C_1^1\times C_5^1+1}{C_{15}^2} = \frac{8}{35}$

$2-0 = 3-1 = 4-2 = 5-3 = 6-4 = 2$

ب) $3-3 = 2-2 = 1-1 = 0$ $P(X=0) = P(B) = \frac{17}{105}$

$P(X=1) = \frac{C_2^1\cdot C_1^1+C_4^1\times C_2^1+C_5^1\times C_4^1+C_1^1\times C_5^1+1+1}{C_{15}^2} = \frac{37}{105}$

$1-0 = 2-1 = 3-2 = 4-3 = 5-4 = 6-5 = 1$

$P(X=3) = \frac{C_5^1\cdot C_1^1+C_1^1\cdot C_2^1+C_1^1\cdot C_4^1+C_1^1\cdot C_5^1}{C_{15}^2} = \frac{16}{105}$

$3-0 = 4-1 = 5-2 = 6-3 = 3$

$4-0 = 5-1 = 6-2 = 4$ $P(X=4) = \frac{C_1^1\cdot C_1^1+C_1^1\cdot C_2^1+C_1^1\cdot C_4^2}{C_{15}^2} = \frac{1}{15}$

$5-0 = 6-1 = 5$ $P(X=5) = \frac{C_1^1\cdot C_1^1+C_1^1\cdot C_2^1}{C_{15}^2} = \frac{1}{35}$

$6-0 = 6$ $P(X=6) = \frac{C_1^1\cdot C_1^1}{C_{15}^2} = \frac{1}{105}$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{17}{105}$	$\frac{37}{105}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{16}{105}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{105}$

$E(X)=\frac{37}{105}+\frac{48}{105}+\frac{16}{35}+\frac{4}{15}+\frac{5}{35}+\frac{6}{105}=\frac{26}{15}$

3) أ) $P(D)=\frac{3(A_6^1\times A_9^2+A_9^1\times A_6^2)}{A_{15}^3}=\frac{27}{35}$

أو: $P(D)=1-\frac{A_6^3+A_9^3}{A_{15}^3}$. يمكن استعمال التوفيقة

ب) $P(E)=\frac{2(A_4^1\times A_5^1\times A_{10}^1)+A_1^1\times A_{11}^2}{A_{15}^3}=\frac{17}{91}$

تمرين 3

1) الاقتراح الصحيح هو أ) لأن:

$AC^2=AB^2+BC^2$ و $AB=BC=\sqrt2$ و $AC=2$

ومنه: ABC قائم و متساوي الساقين.

2) الاقتراح الصحيح هو ج) لأن:

$Z=\left(\frac{+1-i}{-1-i}\right)^{2021}=i^{2021}=(i^2)^{1010}\times i=i$

3) الاقتراح الصحيح هو أ) لأن:

$\left|\frac{2z-2}{z+i}\right|=2\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=2$ ومنه: $|z-z_A|=|z-z_B|$

إذن $AM=BM$ ، (E) هي محور القطعة [AB].

5) الاقتراح الصحيح هو ج) لأن:

$\arg\left(2\cdot\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\arg 2+\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$

$\arg\left(\frac{-2}{i}\right)=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}$ لأن $O\in(F)$ و $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ومنه (F) نصف دائرة قطرها [AB] وتشمل O ماعدا A, B

4) الاقتراح الصحيح هو ب) لأن:

$z'=e^{i(-\frac{\pi}{2})}z$. صورة O هي O (صامدة)

صورة A هي B: $z'=e^{i(-\pi/2)}z_A=-i$

صورة B هي C: $z'=e^{i(-\pi/2)}z_B=(-i)(-i)=-1$

ومنه صورة AOB هو BOC.

6) الجواب الصحيح هو ج) لأن:

$e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}=e^{i\pi/6}(1+e^{i\frac{\pi}{2}})=e^{i\frac{\pi}{6}}(1+i)$

$=e^{i\frac{\pi}{6}}\cdot\sqrt2\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt2\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$

تمرين 4

1) أ) $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

$x=0$ مقارب عمودي (محور التراتيب)

ب) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(1+\ln t^2)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{2\ln t}{t}\right)^2=0$ ، $y=0$

2) أ) $f'(x)=\frac{\frac{2}{x}(1+\ln x)x-(1+\ln x)^2}{x^2}=\frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$: 0 — $\frac1e$ — e : − + −

ب) $x\in]\frac1e,e[$ ؛ f متزايدة تماما.

$x\in]0,\frac1e[\cup]e,+\infty[$ ؛ f متناقصة تماما.

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac4e$	↘	0

ج) نقطة التماس $A(1,1)$: $y=f'(1)(x-1)+f(1)=x$

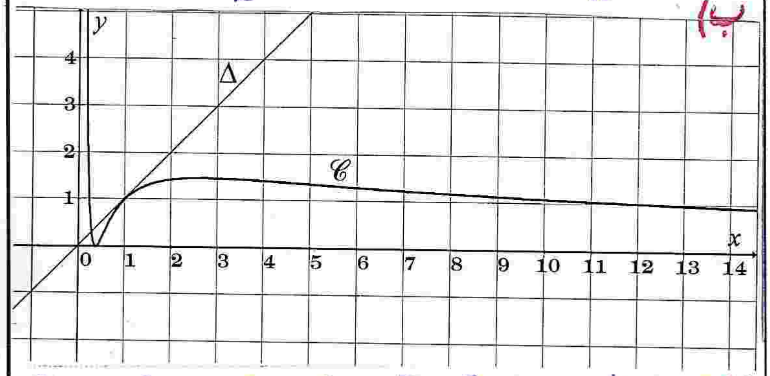
3) أ) $x\ge1$: $x+1\ge2$ و $\ln x\ge0$ ومنه: $x+1+\ln x\ge0$

نضع: $h(x)=x-1-\ln(x)$ ، $h'(x)=\frac{x-1}{x}\ge0$

لما $x\ge1$: h متزايدة و $h(1)=0$ ومنه: $h(x)\ge0$

$f(x)-x=\frac{(1+\ln x)^2}{x}-x=-\frac{(x+1+\ln x)(x-1-\ln x)}{x}\le0$

ب)



4) أ) f متزايدة على [1,2] ومنه: $f(1)\le f(x)\le f(2)$

وسابقا لما $1\le x\le2$: $f(x)\le x$ ومنه: $1\le f(x)\le x$

ب) $\int_1^2 1\,dx\le\int_1^2f(x)\,dx\le\int_1^2x\,dx$ ، $[x]_1^2\le A\le\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

ومنه: $1\le A\le1,5$ / $A=\left[\frac{(1+\ln x)^3}{3}\right]_1^2=1,28\,ua$

5) أ) $n=0$: $u_0=e$ و $1\le u_0\le e$ (محققة)

نفرض أن $1\le u_n\le e$ و نبرهن $1\le u_{n+1}\le e$

لدينا $1\le u_n\le e$ و f متزايدة على $[1,e]$؛

أي $f(1)\le f(u_n)\le f(e)$ أي $1\le u_{n+1}\le\frac4e\le e$ محققة

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb N$: $1\le u_n\le e$ ،

ب) $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n\le0$ (أنظر 3-أ)

لأن $1\le u_n\le e$ ومنه (u_n) متناقصة

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة،

$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$ أي $f(\ell)=\ell$

ومنه $\ell=1$ لأن $f(x)=x$ لما $x=1$ (المماس)

6) أ) $x\in\mathbb R^*$ فإن $-x\in\mathbb R^*$ ؛ D_g متناظرة / O.

$g(-x)=f((-x)^2)=f(x^2)$ ومنه g زوجية

ندرسها على $]0,+\infty[$ ثم نستنتج دراستها على $]-\infty,0[$ وذلك بعكس إشارة فواصل نقاط منحني g. (التناظر بالنسبة لمحور التراتيب).

$g'(x)=2x\,f'(x^2)$ ($x\in\mathbb R^*$)

x	$-\infty$		$-\sqrt e$		$-\frac{1}{\sqrt e}$		0		$\frac{1}{\sqrt e}$		$\sqrt e$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	‖	−	0	+	0	−	
$g(x)$	0	↗	$\frac4e$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac4e$	↘	0

ب) 6 حلول مختلفة: $0<|m|<\frac4e$

$m\in]-\frac4e;0[\cup]0,\frac4e[$

"عبد المطلب"

تصحيح البكالوريا التجريبي 2021م

الموضوع 2:

محمد الطالب،

تمرين 1:

1) الاقتراح الصحيح هو أ) لأن:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{-4}{u_n+4} - u_n = -\frac{(u_n+2)^2}{u_n+4} < 0$$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

2) الاقتراح الصحيح هو ج) لأن:

$2n+1$ - متتالية حسابية حدها الأول 1 و $(e^2-1)e^{2n}$ متتالية هندسية أساسها e^2 وحدها الأول e^2-1.

$$S_n = (e^2-1)\left(\frac{e^{2n+2}-1}{e^2-1}\right) + \frac{n+1}{2}(1-2n+1)$$

$$S_n = e^{2n+2}-1+(n+1)(1-n) = e^{2n+2}-n^2$$

3) الاقتراح الصحيح هو ب) لأن:

$W_0=\frac{3}{2}$ و $W_1 = 2W_0-3 = 0$ وعند استعمال $W_n = -3\cdot 2^{n-1}+3$ نجد: $W_0=\frac{3}{2}$ و $W_1=0$ ومنه محققة.

(يمكن استعمال البرهان بالتراجع)

4) الاقتراح الصحيح هو أ) للسؤال α) و ب) لـ β)

α)
$$y_n = e^{\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\dots+\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$y_n = e^{\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\dots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

$$y_n = e^{\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\dots\times\frac{n+1}{n}\right)} = e^{\ln(n+1)} = n+1$$

β)
$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

بوضع: $t=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n y_n = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}+\ln(1+t) = 1$$

تمرين 2:

1) أ)
$$P(A) = \frac{C_5^1\times C_6^1 + C_3^1\times C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{39}{55}$$

$$P(B) = \frac{C_2^2+C_4^2+C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{2}{11}$$

$$P(A\cap B) = \frac{C_1^1\times C_1^1 + C_2^1\times C_2^1 + C_2^1\times C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{7}{55}$$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{42}{55}$$

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A)-P(A\cap B) = \frac{32}{55}$$

ب) $\boxed{1\times 1 = e\times\frac{1}{e} = e^2\times\frac{1}{e^2} = 1}$
$$P(C) = \frac{C_2^2 + C_4^1\times C_1^1 + C_3^1\times C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{8}{55}$$

2) أ) $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

$\boxed{1\times e = \frac{1}{e}\times e^2 = e}$
$$P(X=1) = \frac{C_2^1\times C_4^1 + C_1^1\times C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{11}{55}$$

ب) $\boxed{\frac{1}{e^2}\times\frac{1}{e} = e^{-3}}$
$$P(X=-3) = \frac{C_1^1\times C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}$$

$\boxed{\frac{1}{e^2}\times 1 = e^{-2}}$
$$P(X=-2) = \frac{C_1^1\times C_2^1}{C_{11}^2} = \frac{2}{55}$$

$\boxed{\frac{1}{e^2}\times e = \frac{1}{e}\times 1 = e^{-1}}$
$$P(X=-1) = \frac{C_1^1\times C_4^1 + C_1^1\times C_2^1}{C_{11}^2} = \frac{6}{55}$$

سابقا سؤال 1-ب $P(X=0) = P(C) = \frac{8}{55}$

$\boxed{e^2\times 1 = e\times e = e^2}$
$$P(X=2) = \frac{C_3^1\times C_2^1 + C_4^2}{C_{11}^2} = \frac{12}{55}$$

$\boxed{e\times e^2 = e^3}$
$$P(X=3) = \frac{C_4^1\times C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{12}{55}$$

$\boxed{e^2\times e^2 = e^4}$
$$P(X=4) = \frac{C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{55}$$

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{3}{55}$

$$E(X) = \frac{-3}{55}-\frac{4}{55}-\frac{6}{55}+\frac{11}{55}+\frac{24}{55}+\frac{36}{55}+\frac{12}{55} = \frac{14}{11}$$

$$P(X^2\leq 9) = P(-3\leq X\leq 3) = 1-P(X=4) = \frac{52}{55}$$

3) أ)
$$P(D) = \frac{2(A_3^1\times A_5^1\times A_5^1)}{A_{11}^3} = \frac{5}{33}$$

ب) $(1,e,e^2)$ أو $(\frac{1}{e},1,e)$ أو $(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e},1)$:

$$P(E) = \frac{A_2^1\times A_4^1\times A_3^1 + A_1^1\times A_2^1\times A_4^1 + A_1^1\times A_1^1\times A_2^1}{A_{11}^3} = \frac{17}{495}$$

تمرين 3:

1) $Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $\overline{Z_B-Z_A} = 2-2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\left(\frac{\overline{Z_B-Z_A}}{Z_A}\right)^{1442} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^{1442} = \left(2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^{1442}$$

$$=(2\sqrt{2})^{1442}e^{-i\frac{4326\pi}{4}} = (2\sqrt{2})^{1442}e^{-i(1081\pi+\frac{\pi}{2})}$$

$$=2^{1442}\times 2^{721}\times e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{2163}i$$ خيالي صرف

2) أ) $Z'-Z_A = e^{i\pi/4}(Z-Z_A)$ (الدوران)

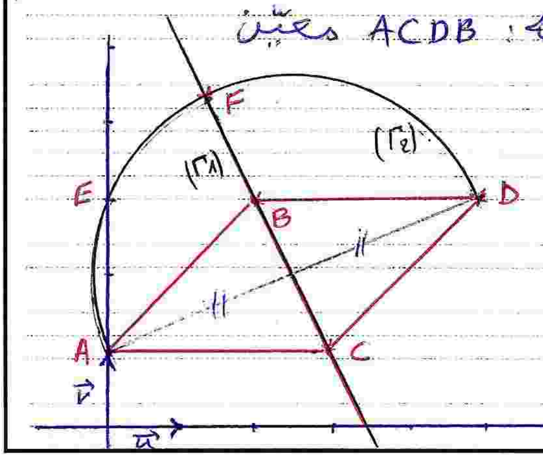
$Z_B-Z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}(Z_C-Z_A) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(2\sqrt{2})$ (محققة)

ومنه: $Z_B = 2+3i$

ب) $Z_D = Z_C + Z_{\vec{AB}} = Z_C+Z_B-Z_A = 2\sqrt{2}+2+3i$

$\vec{CD}=\vec{AB}$ (من الانسحاب) و $AB=AC$ (الدوران تقايس)

ومنه: $ACDB$ معين.



3) أ) لدينا $z_B - z_A = e^{i\pi/4}(z_C - z_A)$ ، ومنه $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{2} = \frac{\pi}{8}$ (معيّن)

ب) $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 2i}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{8}$ و $\left|\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

ومنه :

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

و : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

4) أ) $|z - z_A| = |z - z_D|$ أي $AM = DM$

المجموعة (Γ_1) هي محور القطعة $[AD]$

ب) $\arg\left(\frac{3i - z_D}{3i - z_A}\right) = \arg\left[(\sqrt{2}+1)i\right] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه $E \in (\Gamma_2)$.

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه (Γ_2) هي (قوس) نصف الدائرة قطرها $[AD]$ وتشمل E باستثناء A و D

ج) $\arg\left(\frac{z - z_D}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ و $\left|\frac{z - z_D}{z - z_A}\right| = 1$

منه : $\frac{z - z_D}{z - z_A} = i$ ، نجد : $z = \frac{z_D - i z_A}{1 - i}$

ومنه : $z_F = \sqrt{2} + (\sqrt{2}+3)i$

تمرين 4:

I- 1) $g'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9)$

x	1		3		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-16	$\searrow$	-80	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) g مستمرة و متزايدة تماما على $]4,23 ; 4,24[$

$g(4,23) \simeq -0,916 < 0$ و $g(4,24) \simeq 0,597 > 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $4,23 < \alpha < 4,24$.

إشارة $g(x)$: 1 $-$ α $+$

II- 1) أ) $f'(x) = 1 + 8\left(\frac{2e^{2x}(e^{2x}-1) - 2e^{4x}}{(e^{2x}-1)^2}\right) = 1 - \frac{16e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

$f'(x) = \frac{e^{4x} - 18e^{2x} + 1}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{g(e^x)}{(e^{2x}-1)^2}$

ب) $g(x) \geq 0$ لما $x \geq \alpha$ ومنه : $g(e^x) \geq 0$ لما $e^x \geq \alpha$ ، أي $x \geq \ln\alpha$

$g(x) \leq 0$ لما $1 < x \leq \alpha$ ومنه : $g(e^x) \leq 0$ لما $1 < e^x \leq \alpha$ أي $0 < x \leq \ln\alpha$

2) أ) $x \in \mathbb{R}^*$ كذلك $-x \in \mathbb{R}^*$ ؛ $f(x) = x + 4\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)$

$f(-x) = -x + 4\left(\frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}\right) = -x + 4\left(\frac{e^{2x}+1}{1-e^{2x}}\right) = -f(x)$

ومنه f فردية ، $(\mathcal{C})$ يقبل كمركز تناظر المبدأ O

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 4 + \frac{8e^{2x}}{e^{2x}(1-e^{-2x})}\right] = +\infty$

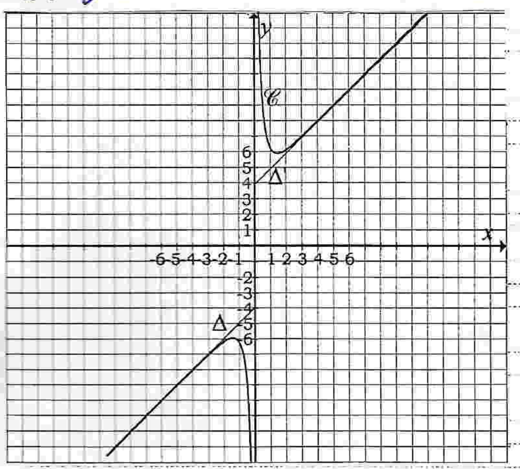
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to 0^+}(e^{2x} - 1) = 0^+$

$x = 0$: مستقيم مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C})$.

ج) بما أن f فردية نشكل جدول التغيرات لما $x > 0$ ، ثم نناظر كل النقاط بالنسبة للمبدأ O لنتحصل على :

x	$-\infty$		$-\ln\alpha$		0		$\ln\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\ln\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\ln\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - x + 4\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{8e^{2x}}{e^{2x}-1} = 0$



ب) و ج)

f فردية ومنه نظير (Δ) بالنسبة للمبدأ O هو $-y = -x - 4$ أي $y = x + 4$ وهي معادلة (Δ') .

$\ln\alpha \simeq 1,44$

$f(\ln\alpha) \simeq 5,9$

4) أ) $A(n) = \int_{\ln\sqrt{n}}^{\ln\sqrt{n+1}} (f(x) - x - 4)\,dx = \int_{\ln\sqrt{n}}^{\ln\sqrt{n+1}} \left(-8 + 8\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right)dx$

($(\mathcal{C})$ فوق (Δ')) $A(n) = \left[-8x + 4\ln(e^{2x} - 1)\right]_{\ln\sqrt{n}}^{\ln\sqrt{n+1}}$

$A(n) = -8\ln\sqrt{n+1} + 4\ln(n+1-1) + 8\ln\sqrt{n} - 4\ln(n-1)$

$A(n) = -4\ln(n+1) + 4\ln n + 4\ln n - 4\ln(n-1)$

$A(n) = 4\ln n^2 - 4\ln(n^2-1) = 4\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} A(n) = 4\ln 1 = 0$

ب) نضع : $h(x) = -8 + \frac{8e^{2x}}{e^{2x}-1}$

$S_n = \int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{3}} h(x)\,dx + \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{4}} h(x)\,dx + \dots + \int_{\ln\sqrt{n}}^{\ln\sqrt{n+1}} h(x)\,dx$

باستعمال علاقة شال : $S_n = \int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{n+1}} h(x)\,dx$

$= -8\ln\sqrt{n+1} + 4\ln n + 8\ln\sqrt{2}$

$S_n = 4\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + 4\ln 2 = 4\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$

$\lim S_n = 4\ln 2$ (أو البرهان بالتراجع) "عبد المطلب"