المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) — دورة: ماي 2021

الشعبة: علوم تجريبية — إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{u_n} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{v_n} \end{cases}$.

1- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \le u_n \le 5$ و $5 \le v_n \le 8$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) ، واستنتج أنّهما متقاربتان.

2- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.

ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le v_n - u_n \le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. استنتج حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.

3- لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \dfrac{u_n - 5}{u_n - 1}$.

أ) بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل w_0 .

ب) اكتب عبارة كل من w_n و u_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

جـ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{u_0 - 1} + \dfrac{5}{u_1 - 1} + \ldots + \dfrac{5^n}{u_n - 1}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحوي كيس ست كريات بيضاء مرقّمة من 1 إلى 6 وتسع كريات سوداء مرقّمة بـ: 0، 1، 2، 2، 2، 3، 3، 3، 3.

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية. الكريات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس.

نسمي الحادثة A: "سحب كريتين لهما نفس اللّون"، والحادثة B: "سحب كريتين لهما نفس الرقم".

1- أ) احسب الاحتمالات التالية: $P(\mathrm{A})$ ، $P(\mathrm{B})$ ، $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ ، $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})$ و $P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$.

ب) احسب احتمال الحادثة C: سحب كريتين جداؤهما مضاعف للعدد 3.

2- نسمي a و b ترقيم الكريتين المسحوبتين، و X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الفرق $a - b$ $(b \le a)$.

أ) عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ، ثم بيّن أنّ: $P(X = 2) = \dfrac{8}{35}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

3- نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إعادة الكرية المسحوبة في كل مرة إلى الكيس.

أ) احسب احتمال الحادثة D: سحب ثلاث كريات من لونين مختلفين.

ب) لتكن الحادثة E: ظهور الرقم 2 مرة واحدة فقط والكرية المسحوبة ثانيا بيضاء. بيّن أنّ $P(\mathrm{E}) = \dfrac{17}{91}$.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C لاحقاتها: $z_A=1$ ، $z_B=-i$ و $z_C=-1$. عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- طبيعة المثلث ABC: أ) متساوي الساقين وقائم **ب)** متساوي الأضلاع **ج)** متساوي الساقين.

2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ العدد Z حيث: $Z=\left(\dfrac{z_A+z_B}{z_B+z_C}\right)^{2021}$. أ) $Z=1$ **ب)** $Z=-1$ **ج)** $Z=i$.

3- المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقّق $\left|\dfrac{2z-2}{z+i}\right|=2$ هي:

أ) المستقيم محور القطعة $[AB]$ **ب)** القطعة المستقيمة $[AB]$ **ج)** الدائرة التي قطرها $[AB]$.

4- صورة المثلث AOB بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\dfrac{\pi}{2}$ هو المثلث: أ) COA **ب)** BOC **ج)** BOA.

5- المجموعة (F) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقّق $\arg\left(\dfrac{2z-2}{z+i}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، $(k\in\mathbb{Z})$ هي:

أ) نصف دائرة قطرها $[AB]$ وتشمل C ما عدا A و B **ب)** دائرة قطرها $[AB]$ ما عدا A و B

ج) نصف دائرة قطرها $[AB]$ وتشمل O ما عدا A و B.

6- الشكل الأسي للعدد المركب $e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}$ هو: أ) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **ب)** $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **ج)** $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب) بوضع $x=t^2$ ، بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t}+2\dfrac{\ln t}{t}\right)^2$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2- أ) أثبت أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، فإنّ $f'(x)=\dfrac{(1-\ln x)(1+\ln x)}{x^2}$ ، ثم ادرس إشارتها.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

3- أ) أثبت أنّه لما $x\geq 1$ ، $x+1+\ln x\geq 0$ و $x-1-\ln x\geq 0$. استنتج أنّه لما $x\geq 1$ ، $f(x)-x\leq 0$.

ب) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

4- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $1\leq x\leq 2$ فإنّ: $1\leq f(x)\leq x$.

ب) لتكن $\mathscr{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C})$، حامل محور الفواصل، والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$ ، بيّن أنّ $1\leq\mathscr{A}\leq 1{,}5$. احسب قيمة $\mathscr{A}$ بتقريب إلى $0{,}01$.

5- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\leq u_n\leq e$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n). استنتج أنّها متقاربة ثم احسب نهايتها.

6- g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=f(x^2)$. أ) بيّن أنّ الدالة g زوجية ثم شكّل جدول تغيراتها على $\mathbb{R}^*$.

ب) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $g(x)=|m|$ ستة حلول متمايزة. بيان g غير مطلوب.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- نعتبر المتتالية العددية (u_n) حدودها أكبر تماما من 2- ، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{-4}{u_n+4}$.

أ) المتتالية (u_n) متناقصة تماما **ب)** المتتالية (u_n) متزايدة تماما **ج)** المتتالية (u_n) غير رتيبة.

2- (v_n) و S_n متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=(e^2-1)e^{2n}-2n+1$ و $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

عبارة S_n بدلالة n: أ) $S_n=e^{2n+2}-n^2+1$ **ب)** $S_n=e^{2n+2}-n^2+n$ **ج)** $S_n=e^{2n+2}-n^2$.

3- نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_0=\dfrac{3}{2}$ و $w_{n+1}=2w_n-3$. عبارة الحد العام:

أ) $w_n=-3\times 2^{n-1}-3$ **ب)** $w_n=-3\times 2^{n-1}+3$ **ج)** $w_n=6\times 2^{n-1}-\dfrac{3}{2}$.

4- (x_n) و (y_n) متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ: $x_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ و $y_n=e^{x_1+x_2+...+x_n}$.

α) عبارة y_n بدلالة n: أ) $y_n=n+1$ **ب)** $y_n=\ln(n+1)$ **ج)** $y_n=e^{n+1}$.

β) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n.y_n)$ تساوي: أ) صفر **ب)** واحد **ج)** $+\infty$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحوي كيس خمس كريات بيضاء تحمل الأعداد **1**، e، e، e^2، e^2، وثلاث كريات سوداء تحمل الأعداد e، e، e^2، وثلاث كريات خضراء تحمل الأعداد **1**، $\dfrac{1}{e}$، $\dfrac{1}{e^2}$. يرمز e إلى أساس اللوغاريتم النيبري.

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية. الكريات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس.

نسمي الحادثة A: "سحب كريتين لهما لونين مختلفين"، والحادثة B: "سحب كريتين لهما العدد نفسه".

1- أ) احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$، $P(B)$، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$ و $P(A\cap \overline{B})$.

ب) احسب احتمال الحادثة C: سحب كريتين جداؤهما يساوي **1**.

2- نسمي a و b العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $\ln(a\times b)$، حيث $\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبري.

أ) بيّن أنّ قيم المتغيّر العشوائي X هي ثمانية، وأنّ: $P(X=1)=\dfrac{1}{5}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$، واحتمال الحادثة: "$X^2\le 9$".

3- نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع بحيث نرتبها حسب ظهورها.

أ) احسب احتمال الحادثة D: سحب كرية واحدة فقط بيضاء والكرية الأولى المسحوبة يجب أن تكون سوداء.

ب) احسب احتمال الحادثة E: سحب ثلاث كريات تحمل أعدادا تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها e.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D لاحقاتها:
$z_A = i$ ، $z_B = 2+3i$ ، $z_C = 2\sqrt{2}+i$ و $z_D = 2\sqrt{2}+2+3i$.

1- اكتب على الشكل الأسي العددين المركبين z_A و $\overline{z_B - z_A}$، ثم بيّن أنّ العدد $\left(\dfrac{\overline{z_B - z_A}}{z_A}\right)^{1442}$ تخيلي صرف.

2- أ) بيّن أنّ النقطة B هي صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

ب) بيّن أنّ D هي صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$. استنتج طبيعة الرباعي ACDB، ثم مثّله.

3- أ) عيّن قيسا بالراديان لكل من الزاوية $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$ والزاوية $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\dfrac{\pi}{8}$ و $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

4- أ) عيّن وأنشئ المجموعة (Γ_1) للنقط M من المستوي لاحقتها z التي تحقّق: $|z - z_A| = |z - z_B - 2\sqrt{2}|$.

ب) لتكن (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z التي تحقّق: $\arg\left(\dfrac{z - z_D}{z - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$،
حيث k عدد صحيح. تحقّق أنّ النقطة E ذات اللّاحقة $3i$ تنتمي إلى المجموعة (Γ_2)، ثم عيّن وأنشئ (Γ_2).

ج) اكتب على الشكل الجبري لاحقة النقطة F تقاطع المجموعتين (Γ_1) و (Γ_2).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^4 - 18x^2 + 1$.

1- شكّل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]1;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقّق $4{,}23 < \alpha < 4{,}24$. استنتج إشارة $g(x)$ لما $x > 1$.

II- نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 4 + \dfrac{8e^{2x}}{e^{2x}-1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أثبت أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(e^x)}{(e^{2x}-1)^2}$.

ب) بيّن أنّ: إذا كان $x \geq \ln\alpha$ فإنّ $f'(x) \geq 0$ و إذا كان $0 < x \leq \ln\alpha$ فإنّ $f'(x) \leq 0$.

2- أ) أثبت أنّ: من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$، الدالة f فردية. ماذا يمكن قوله عن $(\mathscr{C})$؟

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$، ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا.

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

3- أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x - 4$ بجوار $-\infty$.

ب) استنتج أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ') بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ) ارسم المستقيمين المقاربين المائلين (Δ) و (Δ')، والمنحني $(\mathscr{C})$. نأخذ $f(\ln\alpha) \approx 5{,}9$.

4- n عدد طبيعي أكبر تماما من 1. لتكن $\mathcal{A}(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$، المستقيم ذي المعادلة $y = x + 4$، والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \ln\sqrt{n}$ و $x = \ln\sqrt{n+1}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1، فإنّ $\mathcal{A}(n) = 4\ln\left(\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{A}(n)$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1، نضع: $S_n = \mathcal{A}(2) + \mathcal{A}(3) + \dots + \mathcal{A}(n)$.

بيّن أنّ: $S_n = 4\ln\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

انتهى الموضوع الثاني