مؤسّسة الرّجاء والتّفوق الخاصّة (بوزريعة)

السنة الدراسية: 2021-2022	**تصحيح اختبار الفصل الأول**	المادة: الرياضيات
المستوى: 2 ع ت	**في مادة الرياضيات**	الأستاذ: بن مسعود

التمرين	الإجابة	العلامة	
		مجزأة	المجموع
التمرين الأول	1) لدينا 2 جذر لـ $P(x)$ معناه $P(2)=0$ $P(2)=2^3+2\times2^2+(\alpha-3)2+3\times\alpha=0$ $10+5\alpha=0$ $\boxed{\alpha=\frac{-10}{5}=-2}$ ومنه: $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$	0,5	0,5
	2)تحليل $P(x)$: $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ $P(x)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$ $\boxed{P(x)=ax^3+(b-2a)x^2+(cx-2b)x-2c}$ بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\b-2a=2\\c-2b=-5\\-2c=-6\end{cases}$ ومنه: $\boxed{a=1}\boxed{b=4}\boxed{c=3}$ يكون $\boxed{P(x)=(x-2)(x^2+4x+3)}$	1	1
	3) حل المعادلة $P(x)=0$: $P(x)=0$ تكافئ $x-2=0$ أو $x^2+4x+3=0$ ومنه فإن: $S=\{-3,-1,2\}$	0,5	0,5

- استنتاج حلول المعادلة $(E)....-6x^6-5x^4+2x^2+1=0$

بما أن $x=0$ ليس حل للمعادلة (E) فإنها تكافئ :

$$x^6(-6-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6})=0$$

بوضع $X=\frac{1}{x^2}$ يكون $\frac{1}{X^3}(-6-5X+2X^2+X^3)=0$

يصبح لدينا $\frac{1}{X^3}P(X)=0$ أي $X\in\{-3,-1,2\}$

معناه $\frac{1}{x^2}\in\{-3,-1,2\}$.

$\frac{1}{x^2}=-3$ مرفوض، $\frac{1}{x^2}=-1$ مرفوض.

$\frac{1}{x^2}=2$ تقبل حلين: $\boxed{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ و $\boxed{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

0,5 0,5

4) دراسة إشارة $P(x)$

x	$-\infty$	-3		-1		2	$+\infty$
$x-2$	-		-		-	0	+
x^2+4x+3	+	0	-	0	+		+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

1 1

- استنتاج حلول المتراجحة $\frac{P(x)}{2-x}\geq 0$

x	$-\infty$	-3		-1		2	$+\infty$
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$2-x$	+		+		+	0	-
$\frac{P(x)}{2-x}$	-		+		-	‖	-

$\frac{P(x)}{2-x}\geq 0$ معناه $x\in[-3,-1]$.

0,5 0,5

التمرين الثاني

$$f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1} \quad و \quad D_f=[-3,3]$$

1) تعيين α و β :

- (C_f) يشمل النقطة $A(0,1)$ معناه $f(0)=1$

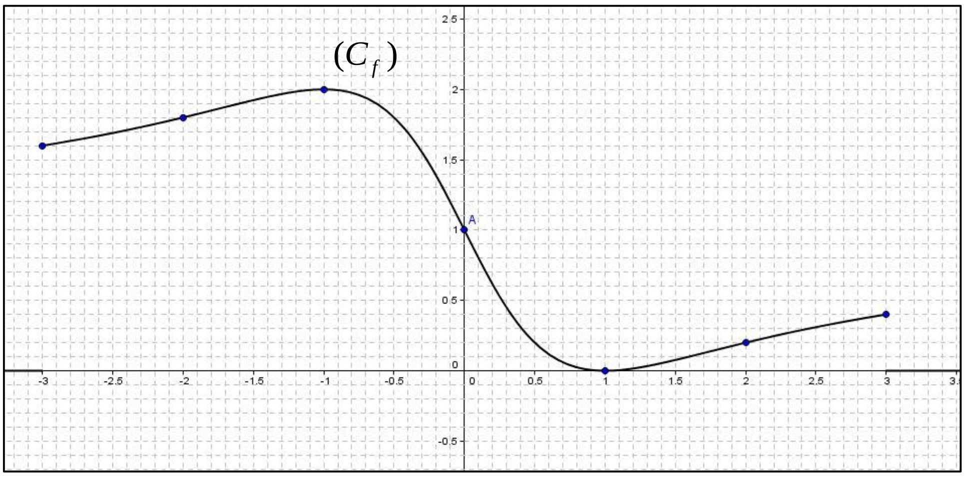
$$f(0)=\frac{0^2+\alpha 0+\beta}{0^2+1}=\frac{\beta}{1}=\beta$$

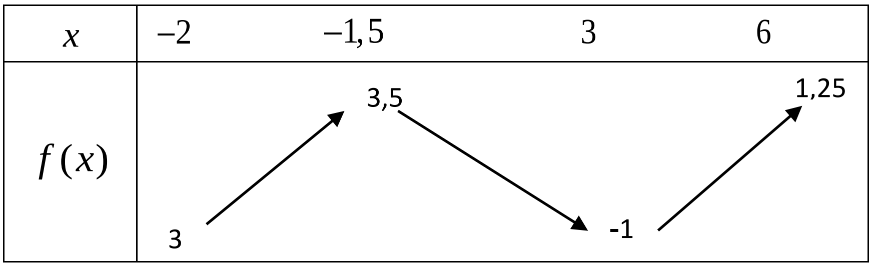
$0,5\times 2$ 1

	لدينا $f(0)=1$ و $f(0)=\beta$ ومنه فإن $\boxed{\beta=1}$. • (C_f) يقبل مماس عند النقطة $A(0,1)$ يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=-2x-3$ معناه $f'(0)=-2$ لدينا f قابلة للاشتقاق على المجال $[-3,3]$ $f'(x)=\dfrac{(2x+\alpha)(x^2+1)-(x^2+\alpha x+\beta)(2x)}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\dfrac{\cancel{2x^3}+2x+\alpha x^2+\alpha\cancel{-2x^3}-2\alpha x^2-2\beta x}{(x^2+1)^2}$ $\boxed{f'(x)=\dfrac{-\alpha x^2+(2-2\beta)x+\alpha}{(x^2+1)^2}}$ $f'(0)=\dfrac{-\alpha 0^2+(2-2\beta)0+\alpha}{(0^2+1)^2}$ $f'(0)=\dfrac{\alpha}{1}=\alpha$ لدينا $f'(0)=\alpha$ و $f'(0)=-2$ ومنه فإن $\boxed{\alpha=-2}$. فتكون $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$		
	2) حساب الدالة المشتقة: لدينا f قابلة للاشتقاق على المجال $[-3,3]$ $f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\dfrac{\cancel{2x^3}\cancel{+2x}-2x^2-2\cancel{-2x^3}+4x^2\cancel{-2x}}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$ $\boxed{f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}}$	1	1

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
3) دراسة إشارة $f'(x)$
- إشارة $f'(x)$ من إشارة (x^2-1) لأن المقام موجب
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>x^2-1</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr>
</table>
- استنتاج التغيرات:
f' موجبة على المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$ ومنه f متزايدة عليهما.
f' سالبة على المجال $[-1,1]$ ومنه f متناقصة عليه.
- جدول تغيرات الدالة f :
<table>
<tr><td>x</td><td>-3</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>1,6</td><td>↗</td><td>2</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td><td>0,4</td></tr>
</table>
</td>
<td>$0,5\times3$</td>
<td>1,5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
4) حصر الدالة f على المجال $[-1,1]$.
f متناقصة على المجال $[-1,1]$ ومنه فإن
$f(1)\le f(x)\le f(-1)$
$\boxed{0\le f(x)\le 2}$
</td>
<td>0,5</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
5) تبيان أن النقطة $A(0,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)
بتغيير المعلم من $(O,\vec{i},\vec{j})$ إلى $(A,\vec{i},\vec{j})$ يكون:
$\begin{cases}x=X\\y=Y+1\end{cases}$
</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
</tr>
</table>

	$y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ $Y+1=\frac{X^2-2X+1}{X^2+1}$ $Y=\frac{X^2-2X+1}{X^2+1}-1$ $Y=\frac{\cancel{X^2}-2X\cancel{+1}\cancel{-X^2}\cancel{-1}}{X^2+1}$ $Y=\frac{-2X}{X^2+1}$ نضع $g(x)=\frac{-2x}{x^2+1}$ من أجل كل $x\in D_g$ فإن $-x\in D_g$ $g(-x)=\frac{-2(-x)}{(-x)^2+1}$ $g(-x)=\frac{2x}{x^2+1}$ $g(-x)=-\frac{-2x}{x^2+1}$ $g(-x)=-g(x)$ أي أن g دالة فردية . ومن هذا نستنتج أن النقطة $A(0,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).		
	6) حساب $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(3)$: $f(1)=\frac{1^2-2\times1+1}{1^2+1}=\frac{0}{2}=0$ $f(2)=\frac{2^2-2\times2+1}{2^2+1}=\frac{1}{5}=0,2$ $f(3)=\frac{3^2-2\times3+1}{3^2+1}=\frac{4}{10}=0,4$ نعلم أن $A(0,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) ومنه فإن $f(0-x)+f(0+x)=2(1)$ أي أن $f(-x)+f(x)=2$ نجد $f(x)=2-f(-x)$ $f(-1)=2-f(1)=2-0=2$ $f(-1)=2-f(2)=2-0,2=1,8$ $f(-3)=2-f(3)=2-0,4=1,6$	1	1

	● رسم المنحنى (C_f)  	1	1
	7) المناقشة البيانية $f(x)=\frac{1}{m}$: بوضع $M=\frac{1}{m}$ تصبح $f(x)=M$ مع $M\in\mathbb{R}^*$ ▪ من أجل $M<0$ أي $\frac{1}{m}<0$ يكون $m<0$ المعادلة لا تقبل حلول. ▪ من أجل $0<M\le 0,4$ أي $0<\frac{1}{m}\le 0,4$ يكون $m\ge 2,5$ المعادلة تقبل حلين. ▪ من أجل $0,4<M<1,6$ أي $0,4<\frac{1}{m}<1,6$ يكون $0,625<m<2,5$ المعادلة تقبل حل وحيد. ▪ من أجل $1,6\le M<2$ أي $1,6\le\frac{1}{m}<2$ يكون $0,5<m\le 0,625$ المعادلة تقبل حلين. ▪ من أجل $M=2$ أي $\frac{1}{m}=2$ يكون $m=0,5$ المعادلة تقبل حل وحيد. ▪ من أجل $M>2$ أي $\frac{1}{m}>2$ يكون $0<m<0,5$ المعادلة لا تقبل حلول.	1	1
التمرين الثالث	.I 1) بقراءة بيانية نجد: $f(1)=0$ ، $f'(3)=0$ ، $f'(1)=\frac{1-0}{0-1}=-1$.	1	1
	2) معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ $y=-1(x-1)+0$ $\boxed{y=-x+1}$	$0,75$	$0,75$

	3) جدول تغيرات الدالة f :  • استنتاج إشارة $f'(x)$: $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -2 & & -1,5 & & 3 & & 6 \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$	$0,5\times2$	1
	4) حل بيانيا المعادلة $f(x)=0$: حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل، نجد $x=1$ و $x=5$.	$0,5$	$0,5$
	II. $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ 1) تفكيك الدالة g : نضع $v(x)=f(x)$ و $u(x)=\frac{1}{x}$ تكون $g(x)=u\circ v(x)$. • مجموعة تعريف الدالة g : $D_g=\{x/x\in D_v, v(x)\in D_u\}$ $D_g=\{x/x\in[-2,6], v(x)\in\mathbb{R}^*\}$ $D_g=\{x/x\in[-2,6], f(x)\neq0\}$ $D_g=\{x/x\in[-2,6], x\neq1, x\neq5\}$ $\boxed{D_g=[-2,1[\cup]1,5[\cup]5,6]}$	$0,5\times2$	1

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الجدول التالي يمثل تغيرات الدالة g على كل مجال من مجموعة تعريفها

على المجال	الدالة f	الدالة مقلوب	الدالة g
$[-2,-1,5]$	متزايدة	متناقصة على مجال تعريفها	**متناقصة**
$[-1,5,1[$	متناقصة		**متزايدة**
$]1,3]$	متناقصة		**متزايدة**
$[3,5[$	متزايدة		**متناقصة**
$]5,6]$	متزايدة		**متناقصة**

1

1

3) كتابة عبارة $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$:

g دالة قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها:

$$g'(x)=\frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$$

0,5

0,5

4) دراسة إشارة $g'(x)$ و استنتاج تغيرات الدالة g :

- لدينا $g'(x)=\frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$ إشارة $g'(x)$ من إشارة $-f'(x)$

x	-2		$-1,5$		1		3		5		6
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+		+	
$g'(x)$		-	0	+	‖	+	0	-	‖	-	

- استنتاج تغيرات الدالة g :

على المجالات $[-2,-1,5]$ ، $[3,5[$ و $]5,6]$ $g'(x)$ سالبة ومنه g متناقصة.

وعلى المجالين $[-1,5,1[$ و $]1,3]$ $g'(x)$ موجبة ومنه g متزايدة.

- النتيجة المتحصلة عليها متطابقة مع نتيجة السؤال 2 .

1,5

$0,5\times3$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>5) جدول تغيرات الدالة g :
<table>
<tr><td>x</td><td>-2</td><td></td><td>$-1,5$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td><td>5</td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>‖</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>‖</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>0,33</td><td>↘</td><td>0,29</td><td>↗</td><td>‖</td><td>↗</td><td>-1</td><td>↘</td><td>‖</td><td>↘</td><td>0,8</td></tr>
</table>
</td>
<td>$0,75$</td>
<td>$0,75$</td>
</tr>
<tr>
<td>سؤال إضافي</td>
<td>لدينا $f(x)=x^2+2x$ و $(f\circ g)(x)=4x^2+16x+15$.
g دالة تآلفية معناه $g(x)=ax+b$ (مع $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$)
يكون:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$(f\circ g)(x)=g(x)^2+2g(x)$
$(f\circ g)(x)=(ax+b)^2+2(ax+b)$
$(f\circ g)(x)=a^2x^2+b^2+2axb+2ax+2b$
$(f\circ g)(x)=a^2x^2+2axb+2ax+b^2+2b$
$(f\circ g)(x)=a^2x^2+(2ab+2a)x+(b^2+2b)$
بالمطابقة مع $(f\circ g)(x)=4x^2+16x+15$ نجد :
$\begin{cases} a^2=4.....① \\ 2ab+2a=16.....② \\ b^2+2b=15.....③ \end{cases}$
من ① نجد $a=2$ أو $a=-2$
نعوض $a=2$ في ② نجد $b=3$ ، نعوض $a=-2$ في ② نجد $b=-5$.
من ③ نجد أيضا $b=3$ و $b=-5$.
ومنه إما $\boxed{g(x)=2x+3}$ أو $\boxed{g(x)=-2x-5}$</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
</tr>
</table>