تصحيح اختبار الفصل الثالث

التمرين الأول:

1) (u_n) ثابتة معناه: $u_0=u_1=....=u_n=u_{n+1}=2\alpha+1$.

أي: $2\alpha+1=\frac{2\alpha+1+3\alpha}{2}$ ، $2(2\alpha+1)=5\alpha+1$ ،

$4\alpha+2=5\alpha+1$ نجد: $\boxed{\alpha=1}$.

2) لدينا: $v_n=u_n-3\alpha$ أي $v_{n+1}=u_{n+1}-3\alpha$ ،

$v_{n+1}=\frac{u_n+3\alpha}{2}-3\alpha$ ، $v_{n+1}=\frac{u_n-3\alpha}{2}$ ، $v_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n-3\alpha)$

ومنه : $\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n}$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

3) نحسب أوّلا v_0:

$v_0=u_0-3\alpha$ ، $v_0=2\alpha+1-3\alpha$ أي: $\boxed{v_0=1-\alpha}$.

نعلم أنّ $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n=(1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

عبارة الحد العام للمتتالية (u_n): لدينا $v_n=u_n-3\alpha$

معناه: $u_n=v_n+3\alpha$ ومنه: $\boxed{u_n=(1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\alpha}$.

نهاية المتتالية (u_n): $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[(1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\alpha\right]=\boxed{3\alpha}$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ حيث $-1<\frac{1}{2}<1$.

4) لدينا: $0<q<1$ ، ومنه :

إذا كان $v_0>0$ ، $1-\alpha>0$ أي $\alpha<1$ تكون (v_n) متناقصة.

وإذا كان $v_0<0$ ، $1-\alpha<0$ أي $\alpha>1$ تكون (v_n) متزايدة.

5) حساب S_n: $S_n=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$$S_n=(1-\alpha)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=2(1-\alpha)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{S_n=(1-\alpha)\left(2-2^{-n}\right)}$$

حساب S'_n:

$$S'_n=u_0+u_1+...+u_n$$

$$S'_n=v_0+3\alpha+v_1+3\alpha+...+v_n+3\alpha$$

$$S'_n=v_0+v_1+...+v_n+3\alpha+3\alpha+...+3\alpha$$

$$S'_n=S_n+3\alpha(n+1)$$

$$\boxed{S'_n=(1-\alpha)\left(2-2^{-n}\right)+3\alpha(n+1)}$$

6) أ)

$w_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-6}$ ، $w_{n+1}=\frac{1}{\frac{u_n+3\alpha}{2}-6}$ ،

$w_{n+1}=\frac{1}{\frac{u_n+3\alpha-12}{2}}$ ، $\boxed{w_{n+1}=2\left(\frac{1}{u_n+3\alpha-12}\right)}$

وتكون (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 إذا كان

$w_{n+1}=2w_n$ أي $\boxed{w_{n+1}=2\left(\frac{1}{u_n-6}\right)}$

ومنه $3\alpha-12=-6$ أي $\boxed{\alpha=2}$.

ب) من أجل $\alpha=2$ يكون $u_0=5$ ، $w_0=\frac{1}{u_0-6}=-1$ ،

وتكون $v_n=(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $w_n=(-1)(2)^n$

معناه: $v_nw_n=(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\times(-1)(2)^n=1$ ، إذن :

$$v_0w_0+v_1w_1+...+v_nw_n=1+1+...+1=1\times(n+1)=\boxed{n+1}$$

التمرين الثاني:

1) لدينا: $(2+2\sqrt{3})^2=2^2+(2\sqrt{3})^2+2\times2\times2\sqrt{3}$ أي

$(2+2\sqrt{3})^2=4+12+8\sqrt{3}$ ومنه $(2+2\sqrt{3})^2=16+8\sqrt{3}$.

2) لدينا: $4X^2+(2\sqrt{3}-2)X-\sqrt{3}=0$

مميز المعادلة: $\Delta=\left(2\sqrt{3}-2\right)^2-4\times4\times\left(-\sqrt{3}\right)$

نجد $\Delta=16+8\sqrt{3}$ أي $\Delta=\left(2+2\sqrt{3}\right)^2$.

حلول المعادلة:

$X_1=\frac{-\left(2\sqrt{3}-2\right)+\left(2+2\sqrt{3}\right)}{2\times4}$ نجد $\boxed{X_1=\frac{1}{2}}$.

$X_2=\frac{-\left(2\sqrt{3}-2\right)-\left(2+2\sqrt{3}\right)}{2\times4}$ نجد $\boxed{X_2=\frac{-\sqrt{3}}{2}}$.

3) بوضع $\cos(x)=X$ ومن السؤال السابق نجد:

$\cos(x)=\frac{1}{2}$ أي $\boxed{x=\frac{\pi}{3}+2k\pi}$ و $\boxed{x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi}$

$\cos(x)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ أي $\boxed{x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi}$ و $\boxed{x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi}$

مع $k\in\mathbb{Z}$.

4) نعلم أنّ: $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$

$$4\cos^4(x)+(2-2\sqrt{3})\left(1-\cos^2(x)\right)+\sqrt{3}-2=0$$

$$4\cos^4(x)+2-2\cos^2(x)-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cos^2(x)+\sqrt{3}-2=0$$

$$4\cos^4(x)+(2\sqrt{3}-2)\cos^2(x)-\sqrt{3}=0$$

بوضع $\cos^2(x)=X$ ومن السؤال $-2-$ نجد:

- $\cos^2(x)=\frac{1}{2}$ أي $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

في المجال $[-\pi;\pi]$ الحلول هي:

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}}$ ، $\boxed{x=\frac{-\pi}{4}}$ ، $\boxed{x=\frac{3\pi}{4}}$ و $\boxed{x=\frac{-3\pi}{4}}$.

- $\cos^2(x)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ مرفوضة.

التمرين الثالث:

1) لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-1)\\-1-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

ولدينا $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-(-1)\\4-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3+3\times(-2)=0$.

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\boxed{\sqrt{13}}$ و $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{3^2+(2)^2}=\boxed{\sqrt{13}}$

ومنه نستنتج أنّ ABC مثلث قائم في A و متساوي السّاقين.

2) $\overrightarrow{BD}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (BD).

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}8-(2)\\5-(-1)\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$.

أي أن $(BD): 6x-6y+c=0$ نعوض في هذه المعادلة

بإحداثيات النّقطة B: $6x_B-6y_B+c=0$ أي $6(2)-6(-1)+c=0$

نجد $c=-18$.

تكون $(BD): 6x-6y-18=0$ ومنه $\boxed{(BD): x-y-3=0}$

المسافة بين C و (BD): $d=\frac{|(1)-(4)-3|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\boxed{3\sqrt{2}}$.

3) $(\mathscr{C}):\ (x-1)^2+(y-4)^2=18$.

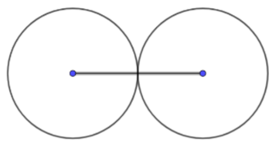
4) لدينا $(\mathscr{C}'):\ x^2+y^2-14x+4y+35=0$.

فتكون $(\mathscr{C}'):\ (x-7)^2+(y+2)^2=18$.

ومنه $(\mathscr{C}')$ هي دائرة مركزها $\Omega(7;-2)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

5)

$(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ يتماسان إذا كانت المسافة بين مركزيهما تساوي مجموع نصفي قطريهما.



حساب ΩC: $\Omega C=\sqrt{(1-7)^2+(4+2)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

ومنه $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ يتماسان في نقطة E.

$(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ لهما نفس نصف القطر ومنه نقطة التماس E هي منتصف $[\Omega C]$.

إحداثيات E: $E\left(\frac{1+7}{2};\frac{4-2}{2}\right)$ ومنه $\boxed{E(4;1)}$.

6) (Δ_m) مماس لـ $(\mathscr{C})$: $\frac{|-2(1)+2(4)+3m|}{\sqrt{(-2)^2+(2)^2}}=3\sqrt{2}$

أي $|6+3m|=12$ نجد: $m=2$ أو $m=-6$.

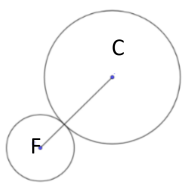
و (Δ_m) مماس لـ $(\mathscr{C}')$: $\frac{|-2(7)+2(-2)+3m|}{\sqrt{(-2)^2+(2)^2}}=3\sqrt{2}$

أي $|-18+3m|=12$ نجد: $m=2$ أو $m=10$.

إذن حتى يكون (Δ_m) مماس لـ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ معا يكون $\boxed{m=2}$

طريقة أخرى: يمكن ملاحظة أنّ E تنتمي للمستقيم (Δ_m) وبالتالي يمكن إيجاد قيمة m بتعويض إحداثيات النقطة E في معادلة المستقيم (Δ_m) ثمّ حل المعادلة المحصّل عليها.

7) نصف قطر $(\mathscr{C})$ + نصف قطر $(\mathscr{C}'')$ = CF



$CF=\sqrt{(7-1)^2+(4-4)^2}=6$

ومنه نصف قطر $(\mathscr{C}'')$: $\boxed{6-3\sqrt{2}}$.

التمرين الرابع:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=\boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=\boxed{+\infty}$

لدينا $\lim\limits_{x\to2}2x^3-7x^2+4x+3=-1$ و $\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2=0^+$

إذن: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\boxed{-\infty}$.

2) لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-1}{(x-2)^2}=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

وبما أنّ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$ فإن $\boxed{x=2}$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

3) $f(x)-y=f(x)-(2x+1)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$ أي $f(x)-y<0$

ومنه (C_f) دائما تحت المستقيم (Δ).

4) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{2\}$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{(6x^2-14x+4)\times(x-2)^2-2(x-2)\times(2x^3-7x^2+4x+3)}{(x-2)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-2)\left[(6x^2-14x+4)\times(x-2)-2\times(2x^3-7x^2+4x+3)\right]}{(x-2)^4}$$

نجد: $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x^2-5x+7)}{(x-2)^3}$

5) لدينا: $x^2-5x+7>0$ ، يمكن تلخيص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		-	0	+		+	
$(x-2)^3$		-		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	||	+	

- استنتاج التغيرات:

f' موجبة على المجالين $]-\infty;1]$ و $]2;+\infty[$ ومنه f متزايدة عليهما.

f' سالبة على المجال $[1;2[$ ومنه f متناقصة عليه.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

6) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ ، بالتحليل نجد $f(x)=\dfrac{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(2x^2-4x-2)}{(x-2)^2}$

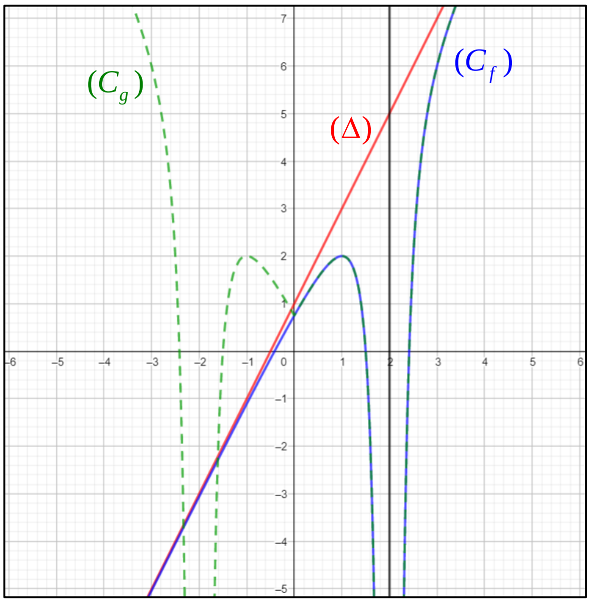
حلول المعادلة $2x^2-4x-2=0$ هي: $x\approx 2,41$ و $x\approx -0,41$

ومنه نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل هي:

$A\left(\dfrac{3}{2};0\right)$ ، $B(2,41;0)$ و $C(-041;0)$.

7) $f(0)=\dfrac{3}{4}$.

الرسم:



8) $2x+m=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ ، $-2x-m=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$ ،

$-m=\dfrac{-1}{(x-2)^2}+2x$ ، $-m+1=\dfrac{-1}{(x-2)^2}+2x+1$ ،

أي $f(x)=1-m$ من البيان نجد أنّ هذه المعادلة تقبل ثلاث حلول متمايزة لما $1-m<2$ أي $\boxed{m>1}$.

9) أ) لدينا:

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\dfrac{-2x^3-7x^2-4x+3}{(-x-2)^2}-\dfrac{3}{4}}{x}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{x(-8x^2-31x-28)}{4x(x+2)^2}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-8x^2-31x-28}{4(x+2)^2}=\boxed{\frac{-7}{4}}$$

وأيضا:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\dfrac{2x^3-7x^2+4x+3}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{4}}{x}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x(8x^2-31x+28)}{4x(x-2)^2}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{8x^2-31x+28}{4(x-2)^2}=\boxed{\frac{7}{4}}$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ إذن نستنتج أنّ الدّالة g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$.

ب) لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$ فإن $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$

و $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ ومنه g دالة زوجية.

- لما $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$ تكون $g(x)=f(x)$ ، ومنه يكون (C_g) منطبق على (C_f) .
- و بما أن g دالة زوجية فإن منحناها متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.