تصحيح اختبار الفصل الأول 2021

عبد المطلب"

تمرين 1:

1) خطأ: لأن $f(-2) > -2$.
من أجل $x < 0$ ، $f(x) > -2$.

2) صحيح: لأن $f'(x)$ انعدمت عند 0 ولم تغيّر إشارتها.

3) صحيح: لأن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ،
و $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

4) خطأ: المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين فقط أحدهما في $]-\infty;1[$ ،
والآخر في $]1;3]$.

5) صحيح: $f(3) > f(2)$ لأن f متزايدة على $]1;3]$ و $f(4) > f(5)$
لأن f متناقصة على $[3;+\infty[$.

6) خطأ: نضع: $g(x) = f(x^2-1)$ ؛
$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2-1)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 0$$

تمرين 2:

1) أ)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \overbrace{\frac{2}{x+1}}^{\to 0} + \ln\Big(\overbrace{\frac{x+1}{x}}^{\to 1}\Big)\right) = +\infty$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ، لأن $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$
$x=0$ مستقيم مقارب لـ (C) .

ب)
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x+1} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

$y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C)

2) أ)
$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x(x+1)^2 - 2x + x(x+1) - (x+1)^2}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x(x+1)^2}$$

ب) $f'(1) = 0$. بعد التحليل نجد:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+1)}{x(x+1)^2}$$

بما أن $x > 0$ فإن $x^2+3x+1 > 0$
ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)$

$0 \quad - \quad 1 \quad +$

ج) f متزايدة تماما لما $x \geq 1$.
f متناقصة تماما لما $0 < x \leq 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

ب)
$$g'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

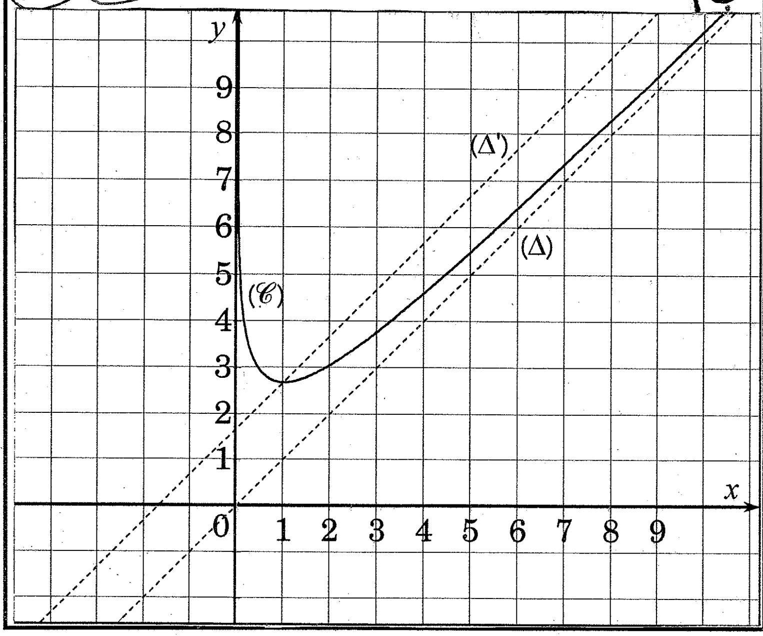
$g'(x) = \dfrac{-3x-1}{x(x+1)^2} < 0$ لأن $x>0$ ،
ومنه g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ومنه $g(x) > 0$.

يمكن دراسة إشارة $g(x)$ دون $g'(x)$

ج) $f(x) - y = g(x) > 0$
ومنه المنحنى (C) أعلى (Δ) .

4) أ) $y = x + a$ (الميل يساوي 1)
و $A(1;2+\ln 2)$ تنتمي إلى (Δ')
$2+\ln 2 = 1 + a$ ومنه (Δ') : $y = x+1+\ln 2$

ب)



جـ) $f(x) = x + \ln m$ تقبل حلا $x > 1$:

$0 < \ln m < 1 + \ln 2$ ومنه $1 < m < 2e$

5) $h'(x) = -2 f'(-2x+1)$

$h'(x) = 0$ لما $-2x+1 = 1$ أي $x = 0$

$f'(-2x+1) > 0$ لما $-2x+1 > 1$ أي $x < 0$

$f'(-2x+1) < 0$ لما $-2x+1 < 1$ أي $0 < x < \frac{1}{2}$

* $x < 0$: $h'(x) < 0$ ؛ ومنه h متناقصة تماما
* $0 < x < \frac{1}{2}$: $h'(x) > 0$ ، ومنه h متزايدة تماما

تمرين 3 :

I-1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e\cdot e^x - x e^x - e^x - 1) = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x(e-x-1) - 1\right] = -\infty$

2) $g'(x) = e^{x+1} - \left[e^x + e^x(x+1)\right]$

$g'(x) = e^x\cdot e - (x+2)e^x = e^x(-x-2+e)$

x	$-\infty$		-1		$e-2$		α		$+\infty$
$g'(x)$			+		0		−		
$g(x)$	-1	↗	0	↗	$e^{e-2}-1$	↘	0	↘	$-\infty$

3) $g(-1) = 0$. g مستمرة ومتناقصة تماما على $]1,4;1,5[$. $g(1,4) \simeq 0,29 > 0$ ؛

$g(1,5) \simeq -0,02 < 0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

4) إشارة $g(x)$: $-$ $\;-1\;$ $+$ $\;\alpha\;$ $-$

II 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x\left(2 + \frac{x}{e^x} - \frac{e}{x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 2$

$y = 2$ مستقيم مقارب لـ (C) .

ب) $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$

$x = 0$ مستقيم مقارب لـ (C) .

2) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^x + xe^x - e\,e^x}{e^x - 1} = 0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$.

ب) $f(x) - y = \dfrac{e^x(x+2-e)}{e^x - 1}$

x	$-\infty$		0		$e-2$		$+\infty$
$x+2-e$		−		−	0	+	
e^x-1		−	0	+		+	
$f(x)-y$		+	‖	−	0	+	

$x \in]-\infty;0[\cup]e-2;+\infty[$ ، (C) فوق (Δ)

$x \in]0;e-2[$ ، (C) تحت (Δ) .

(C) يقطع (Δ) عند $A(e-2;2)$.

جـ) $f'(x) = \dfrac{(2e^x+1)(e^x-1) - e^x(2e^x+x-e)}{(e^x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-e^x - 1 - xe^x + e\cdot e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	2

3) أ) $g(\alpha) = 0$ ؛ $e^\alpha(e-\alpha-1) - 1 = 0$

$e - \alpha - 1 = \frac{1}{e^\alpha} = e^{-\alpha}$ ومنه $e - \alpha = e^{-\alpha} + 1$

$f(\alpha) = \dfrac{2e^\alpha + \alpha - e}{e^\alpha - 1} = \dfrac{(2e^\alpha - e^{-\alpha} - 1)e^\alpha}{(e^\alpha - 1)e^\alpha}$

$f(\alpha) = \dfrac{2e^{2\alpha} - e^\alpha - 1}{e^\alpha(e^\alpha - 1)} = \dfrac{(e^\alpha-1)(2e^\alpha+1)}{(e^\alpha-1)e^\alpha} = 2 + e^{-\alpha}$

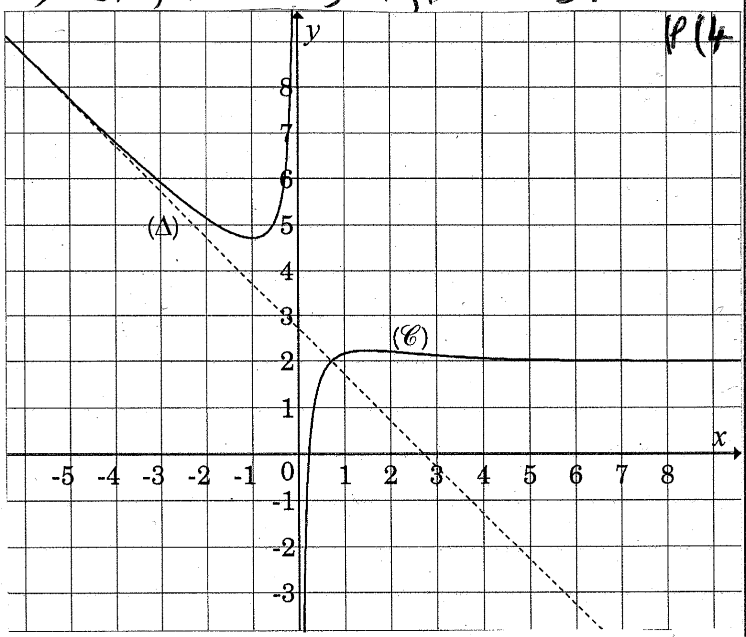
$2,22 < f(\alpha) < 2,25$

ب) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,2;0,3[$

$f(0,2) \simeq -0,34 < 0$ و $f(0,3) \simeq 0,8 > 0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

4) أ)



ب) $f(x) = e^m + 2$ ، $2 < e^m + 2 < 2 + e^{-\alpha}$

$0 < e^m < e^{-\alpha}$ ؛ ومنه $m < -\alpha$

جـ) $f(\beta) = 0$ ، $e - \beta = 2e^\beta$ ، $y = f'(\beta)(x - \beta)$ لأن $f(\beta) = 0$

$f'(\beta) = \dfrac{(e-\beta)e^\beta - e^\beta - 1}{(e^\beta-1)^2} = \dfrac{2e^{2\beta} - e^\beta - 1}{(e^\beta-1)^2} = \dfrac{(e^\beta-1)(2e^\beta+1)}{(e^\beta-1)^2} = \dfrac{2e^\beta+1}{e^\beta-1}$