تصحيح اختبار الفصل الثاني 2022م

تمرين 2:

1) $P(A) = \dfrac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3} = \dfrac{1}{6}$

$P(B) = \dfrac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_6^1}{C_9^3} = \dfrac{1}{7}$

$P(C) = \dfrac{C_3^2 \cdot C_6^1 + C_2^2 \cdot C_7^1 + C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{13}{42}$

$P(D) = 1 - P(C) = \dfrac{29}{42}$

2) $P(A \cap D) = \dfrac{C_5^3 + C_2^1 \cdot C_2^2}{C_9^3} = \dfrac{1}{7}$

$P_{\bar{A}}(D) = \dfrac{P(D \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(D) - P(A \cap D)}{1 - P(A)} = \dfrac{23}{35}$

3) $X = \{0; 1; 2; 3\}$

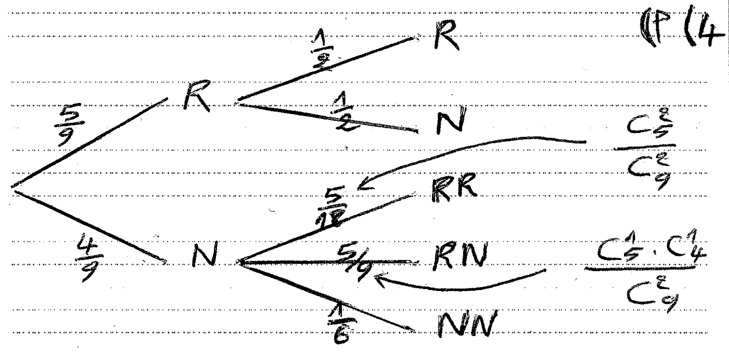
$P(X=0) = \dfrac{C_6^3}{C_9^3} = \dfrac{5}{21}$; $P(X=1) = \dfrac{C_3^1 \times C_6^2}{C_9^3} = \dfrac{15}{28}$

$P(X=2) = \dfrac{C_3^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \dfrac{3}{14}$; $P(X=3) = \dfrac{C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{1}{84}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

$E(X) = 0 + \dfrac{15}{28} + \dfrac{6}{14} + \dfrac{3}{84} = 1$

4) أ)



ب) $P = P(R \cap R) + P(R \cap N) + P(N \cap RR)$

$+ P(N \cap RN) = 1 - P(N \cap NN) = \dfrac{25}{27}$

تمرين 1:

1) $Z = \dfrac{z}{z+2} = \dfrac{x+iy}{x+iy+2}$

$Z = \dfrac{(x+iy)(x+2-iy)}{(x+2+iy)(x+2-iy)}$

$(x;y) \neq (-2;0)$: $Z = \dfrac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2} + i\,\dfrac{2y}{(x+2)^2+y^2}$

2) 1- الإجابة الصحيحة هي (أ) لأن:

Z حقيقي يعني الجزء التخيلي معدوم $(y=0)$

(E_1) هي مستقيم معادلته $y=0$ ماعدا $A(-2;0)$

2- الإجابة الصحيحة هي (ج) لأن:

Z تخيلي صرف يعني الجزء الحقيقي معدوم

$$x^2+y^2+2x=0$$
$$(x+1)^2+(y-0)^2=1^2$$

(E_2) هي الدائرة (ح) التي مركزها $B(-1;0)$

ونصف قطرها $r=1$ ماعدا $A(-2;0)$.

3- الإجابة الصحيحة هي (ب) لأن:

$|Z|=1$ يعني $\left|\dfrac{z}{z+2}\right|=1$ أي $\dfrac{|z|}{|z+2|}=1$

$|z|=|z+2|$ أي $|x+iy|=|x+2+iy|$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$$
$$x^2+y^2 = x^2+4x+4+y^2$$

نجد $x=-1$ ومنه (E_3) هي مستقيم معادلته $x=-1$

4- الإجابة الصحيحة (ب) $\dfrac{z}{z+2} = \bar{z} - 1$

$$z\bar{z} + 2(\bar{z} - z) - 2 = 0$$
$$(x+iy)(x-iy) + 2(x-iy-x-iy) - 2 = 0$$
$$x^2+y^2-2-4yi=0$$

عند حل هذه الجملة نجد: $\begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ -4y=0 \end{cases}$

$x=\pm\sqrt{2}$, $y=0$ ومنه:

$z_1=\sqrt{2}$ و $z_2=-\sqrt{2}$

تمرين 3:

1) $n \geq 0$; $n+2 \geq 2$; $\ln(n+2) \geq \ln 2 > 0$

ومنه: $\ln(n+2) > 0$.

$u_{n+1} - u_n = \ln(n+2) > 0$

ومنه: (u_n) متزايدة تماما

2) $n=0$: $u_0 = \ln 1! = \ln 1 = 0$ (محققة)

نفرض أن $u_n = \ln(n+1)!$ ونبرهن صحة $u_{n+1} = \ln(n+2)!$

$u_{n+1} = u_n + \ln(n+2) = \ln(n+1)! + \ln(n+2)$

$= \ln(n+2)(n+1)! = \ln(n+2)!$

محققة، ومنه $u_n = \ln(n+1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) أ) $V_n = \frac{e^{\ln(n+1)!}}{n!} + n = \frac{(n+1)!}{n!} + n$

$V_n = \frac{(n+1)\,n!}{n!} + n = n+1+n = 2n+1$

$V_{n+1} - V_n = 2(n+1)+1-2n-1 = 2$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها 2 و $V_0 = 1$

ب) $P_n = e^{V_0+V_1+\dots+V_n} = e^{\frac{n+1}{2}(V_0+V_n)}$

$= e^{\frac{n+1}{2}(2n+2)} = e^{(n+1)^2}$

$S_n = \left(\frac{1}{e}\right)^1 + \left(\frac{1}{e}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{e}\right)^{2n+1}$ مجموع متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{1}{e}\right)^2$ وحدها الأول $\frac{1}{e}$.

$S_n = \frac{1}{e}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{2n+2}}{1-\left(\frac{1}{e}\right)^2}\right)$

$S_n = \frac{e}{e^2-1}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{2n+2}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} P_n = +\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{e^2-1}$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{2n+2} = 0$

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+4e^x-6xe^x\right) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{4}{x}-6\right) = +\infty$

2) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ (C_g) فوق (C_h).

3) $g(x)-h(x)>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

II-1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{2x}{e^x}\right)} + x+1 = +\infty$

ب) $f'(x) = \frac{e^x(e^x-2x)-(e^x-2)(e^x-2)}{(e^x-2x)^2} + 1$

$f'(x) = \frac{e^{2x}+4e^x-6xe^x+4x^2-4}{(e^x-2x)^2} = \frac{g(x)-h(x)}{(e^x-2x)^2} > 0$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

ج) $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$(T): y = x$

2) أ) $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x-1) = 0$ ($y=x+1$ م.م.م مائل بجوار $-\infty$)

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = 0$ ($y=x+2$ م.م مقارب مائل بجوار $+\infty$)

ب) $f(x)-x-1 = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$

$-$ $\ln 2$ $+$: C_f تحت (Δ) ، C_f فوق (Δ)

(C_f) يقطع (Δ) عند $A(\ln 2, \ln 2+1)$

$f(x)-x-2 = \frac{2x-2}{e^x-2x}$

$-$ 1 $+$: C_f تحت (Δ') ، C_f فوق (Δ')

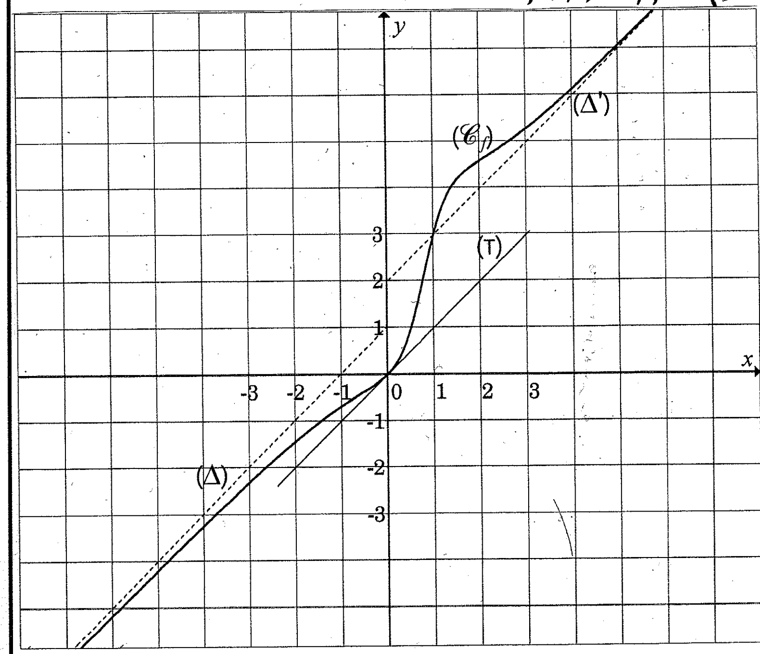
C_f يقطع (Δ') عند $B(1,3)$

ج) $f(x)-x = \frac{2(e^x-x-1)}{e^x-2x} \ge 0$ لأن $e^x \ge x+1$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ (C_f) فوق المماس (T)

(C_f) يمس (T) عند المبدأ $O(0,0)$.

3) $f(1,6) \simeq 4,3$.



4) $e^x(1-m) = 2(1-mx)$

نجد: $e^x-2 = m(e^x-2x)$ ؛ $m = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$

$m+x+1 = \frac{e^x-2}{e^x-2x} + x+1$

$f(x) = x+m+1$ حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات التي ميلها 1.

حلين مختلفين في الإشارة: $0 < m+1 < 1$

ومنه: $-1 < m < 0$

5) $A(\lambda) = \int_1^\lambda (f(x)-x-2)\,dx = \int_1^\lambda \left(\frac{e^x-2}{e^x-2x}-1\right)dx$

$A(\lambda) = \left[\ln(e^x-2x)-x\right]_1^\lambda$

$A(\lambda) = \left(\ln(e^\lambda-2\lambda)-\lambda-\ln(e-2)+1\right)$ u.a

$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left[e^\lambda\left(1-\frac{2\lambda}{e^\lambda}\right)\right]-\lambda+1-\ln(e-2)$

$= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left(1-\frac{2\lambda}{e^\lambda}\right)+1-\ln(e-2) = 1-\ln(e-2)$ u.a

III- لنبرهن بالتراجع أن: $-1 \le u_n \le 0$.

$n=0$: $-1 \le u_0 \le 0$ (محققة)

نفرض أن $-1 \le u_n \le 0$ ونبرهن $-1 \le u_{n+1} \le 0$

$-1 \le u_n \le 0$ ؛ $f(-1) \le f(u_n) \le f(0)$ (f متزايدة)

ومنه $-1 \le -0,69 \le f(u_n) \le 0$ ومنه: $-1 \le u_{n+1} \le 0$

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $-1 \le u_n \le 0$

لدينا: $f(x) \ge x$ ومنه $f(u_n) \ge u_n$ ،

ومنه $u_{n+1} \ge u_n$ ومنه (u_n) متزايدة.

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ ومنه $f(\ell) = \ell$

$\ell = 0$ لأن $f(0) = 0$

"عبد المطلب"