المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) دورة: ماي 2022

الشعبة: علوم تجريبية إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- الشكل الجبري للعدد المركب $\left[\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right]^{2022}$ هو: أ) 1 ب) -1 ج) $-i$.

2- الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{6e^{i\frac{3\pi}{4}}.e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$ هو: أ) $3e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ب) $3e^{i\frac{\pi}{12}}$ ج) $3e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

3- الشكل المثلثي لـ $\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right]^2$ هو: أ) $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ ب) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ج) $2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$.

4- مجموعة حلول المعادلة $z^2-z.\bar{z}+2=0$ في $\mathbb{C}$ هي: أ) $S=\{-i;i\}$ ب) $S=\{-1;1\}$ ج) $S=\{i\}$.

5- مجموعة النقط M لاحقتها z التي تحقّق $|z+i|=1$ هي: أ) مستقيم ب) قطعة مستقيمة ج) دائرة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 9كريات بيضاء مرقّمة من 1 إلى 9، و6كريات سوداء مرقّمة من 1 إلى 6، لا نفرق بين الكريات باللمس.

I- نسحب من هذا الكيس وبطريقة عشوائية أربع كريات في آن واحد.

1- احسب p_1 احتمال سحب أربع كريات تحمل كل واحدة منها رقما زوجيا.

2- احسب p_2 احتمال سحب كرية واحدة على الأقل تحمل رقما فرديا.

3- احسب p_3 احتمال سحب أربع كريات تحمل أرقاما زوجية أو أربع كريات تحمل أرقاما فردية.

4- احسب p_4 احتمال سحب أربع كريات تحمل أرقاما فردية ومن لونين مختلفين.

5- احسب p_5 احتمال سحب كرية واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا أو كل الكريات من نفس اللون.

6- احسب p_6 احتمال سحب كريتين فقط تحملان رقمين فرديين إذا علمت أنّ كل الكريات من نفس اللّون.

7- ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المتبقية في الكيس.

أ) برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي هي: 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X. ثم بيّن أنّ $E(X)=\frac{22}{5}$، واحسب $p(X^2-3X\leq 0)$.

II- نسحب الآن كرية من الكيس، إذا كان ترقيمها من مضاعفات 3 نرجعها إلى الكيس ونسحب كرية ثانية، وإذا كانت غير ذلك نضعها جانبا ونسحب كرية ثانية من الكيس. الحدث A_1: سحب الكرية الأولى التي ترقيمها من مضاعفات 3، والحدث A_2: سحب الكرية الثانية التي ترقيمها من مضاعفات 3. أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم احسب $p(A_2)$ احتمال أن يكون في السحب الثاني كرية ترقيمها من مضاعفات 3.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{u_n+4}$.

1- أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n>0$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\le\dfrac{3}{4}u_n$ ، وأنّ $u_n\le 8\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\dfrac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n-1}$. احسب مرّة أخرى نهاية u_n.

4- لتكن (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=1+\dfrac{a}{u_n}$.

أ) عيّن قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{4}{3}$.

ب) نضع $a=1$، احسب بدلالة n: $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+...+\dfrac{1}{u_n}$ و $S'_n=v_0+3v_1+...+3^nv_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f و g الدالتان المعرّفتان على $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=3x^2-6x(1-e^{-x})$ و $g(x)=3x^2-6x$.

وليكن $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ تمثيلهما البياني على الترتيب في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2- أ) بيّن أنّ $f'(x)=6(x-1)(1-e^{-x})$ ، ثم ادرس إشارة $f'(x)$ على $[-1;+\infty[$.

ب) شكّل جدول تغيرات كل من f و g على المجال $[-1;+\infty[$.

3- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[1;+\infty[$. تحقّق أنّ $1<\alpha<2$ ، ثم أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

4- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحنى $(\mathscr{C}')$، ثم ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

5- بيّن أنّ معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند $x_0=\alpha$ هي $y=3\alpha(\alpha-1)(x-\alpha)$.

6- أ) عيّن العددين الحقيقيين a و b ، بحيث تكون الدالة $x\mapsto(ax+b)e^{-x}$ أصلية الدالة $x\mapsto xe^{-x}$.

ب) نضع $I_\alpha=\int_0^\alpha[f(x)-g(x)]dx$. بيّن أنّ $I_\alpha=3\alpha(\alpha-1)$ ، ثم أعط تفسيرا بيانيا للعدد I_α .

7- h الدالة العددية المعرّفة على $[-1;+\infty[$ بـ: $\begin{cases}h(x)=f(x) & -1\le x\le 0\\ h(x)=g(x) & x>0\end{cases}$ و $(\mathscr{H})$ تمثيلها البياني.

أ) بيّن أنّ h غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$. ماذا تمثل النقطة O بالنسبة لـ$(\mathscr{H})$؟

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة h على $[-1;+\infty[$.

جـ) ارسم نصفي المماسين لـ$(\mathscr{H})$ عند $x_0=0$ ، والمنحني $(\mathscr{H})$ في معلم آخر.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

	السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1	المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x}{e^x+1}$ ، يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته:	$y=x-1$	$y=x+1$	$y=x$
2	الدالة الأصلية للدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)}$. والتي تنعدم عند $\frac{1}{e}$ هي:	$\frac{(\ln x+2)^2}{2}$	$\ln(\ln x+2)+1$	$\ln(\ln x+2)$
3	المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}^*$ بالعبارة: $v_n=n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ، هي متتالية:	متزايدة تماما ومتباعدة	متناقصة تماما ومتباعدة	متزايدة تماما ومتقاربة
4	المتتالية المعرّفة بـ: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_n=\int_n^{n+1} e^{2x}\,dx$. نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، عبارة S_n هي:	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}-1\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}-e^{2n}\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}+1\right)$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^{2x}-2x+3)-x]$ تساوي:	$-\infty$	$+\infty$	0
6	حلُّ المعادلة التفاضلية $y'+y=(2x+1)e^{-x}$ ، الذي يحقّق $y(-1)=0$ هو:	$(x^2-1)e^{-x}$	$(x^2+x+1)e^{-x}$	$(x^2+x)e^{-x}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا ثلاثة أقفاص، في كل قفص عشرة طيور. القفص C_1 يحتوي على 6 من طائر الحسون (A) و4 من الكناري (B)، القفص C_2 يحتوي على 5 من طائر الحسون (A) و5 من الكناري (B)، القفص C_3 يحتوي على 7 من طائر الحسون (A) و3 من الكناري (B).

نرمي زهرة نرد مكعبة ومتوازنة لها ستة أوجه مرقّمة من 1 إلى 6. إذا ظهر الوجه الذي يحمل الرقم 3 نسحب طائرا واحدا من القفص C_1، وإذا ظهر الوجه الذي يحمل رقما زوجيا نسحب طائرا واحدا من القفص C_2، وإذا ظهر غير ذلك نسحب طائرا واحدا من القفص C_3.

1- أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم بيّن أنّ احتمال سحب طائر الحسون $P(A)=\frac{7}{12}$.

2- إذا سحبنا طائر الحسون، ما احتمال أن يكون من القفص C_1؟

3- نضيف إلى القفص C_2، n طيرا من طائر الحسون (A) ثم نكرّر عملية السحب السابقة.

أ) بيّن أنّ احتمال سحب الكناري $P(B)=\frac{n+25}{6(n+10)}$ ، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث $P(B)>\frac{1}{4}$.

ب) عيّن قيمة n حتى تكون الحادثتان: السحب من C_2 وسحب الكناري (B) مستقلتين.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}$.

1- عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نفرض في باقي التمرين أنّ $\alpha=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$.

2- أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $\sqrt{2}<u_n<2$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln(u_n-\sqrt{2})$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n. تأكّد من النهاية المحصل عليها في (2- ب).

ج) نضع من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}$، $S_n=\frac{v_0}{2^0}+\frac{v_1}{2^1}+\frac{v_2}{2^2}+...+\frac{v_n}{2^n}$. بيّن أنّ: $S_n=(-n-1)\ln 2$.

د) نضع من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}^*$، $S'_n=\frac{1}{v_0\times v_2}+\frac{1}{v_1\times v_3}+...+\frac{1}{v_{n-1}\times v_{n+1}}$. احسب S'_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-e+e\ln x$

1- احسب $g'(x)$، ثم بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}54<\alpha<1{,}55$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(\frac{x-e}{x}\right)\ln x$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستو المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أثبت أنّه من أجل كل $x>0$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2- احسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ (أعط تفسيرا بيانيا) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$. ماذا يمكن قوله عن المنحني $(\mathscr{C})$ والمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $\ln$؟

ب) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{C}')$، وكذلك وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لحامل محور الفواصل.

4- أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=2-\left(\frac{\alpha}{e}+\frac{e}{\alpha}\right)$. باستخدام حصر العدد α، بيّن أنّ $-0{,}34<f(\alpha)<-0{,}32$.

ب) احسب $f(4)$ و $f(6)$ ثم ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$. $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\|=2\text{cm}$.

ج) باستعمال المنحني $(\mathscr{C})$ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلين متمايزين، كل منهما أكبر تماما من 1.

5- M_0 نقطة من $(\mathscr{C})$ فاصلتها x_0 و (Tx_0) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة M_0. بيّن أنّ (Tx_0) يشمل النقطة $A\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$ إذا تحقّق: $(x_0-2e)(-1+2\ln x_0)=0$. استنتج عدد المماسات لـ $(\mathscr{C})$ التي تشمل A.

6- λ عدد حقيقي أكبر من 1. احسب بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ لمجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي حيث: $1\le x\le\lambda$ و $f(x)\le y\le\ln x$، ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda}$. (ضع $t=\ln\lambda$ وتذكّر أنّ $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty$)

انتهى الموضوع الثاني

وفّقكم الله أعزائي الطلاب في البكالوريا