تصحيح اختبار الفصل الأول 2022م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

I-1) أ. $x>0$: (Γ) أعلى (D) ؛ $x<0$: (Γ) أسفل (D) ؛ (Γ) يقطع (D) عند $A(0;1)$

• (Γ) أعلى (D') من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2) • $u(x)=e^x-(-2x+1)$ ؛ إشارة $u(x)$: $-$ 0 $+$

• $V(x)=e^x-(2x-1)>0$.

II-1) أ)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{e^x}{x}+2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2+\frac{1}{x}\right)}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{2x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}=1$$

$y=-1$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي بجوار $-\infty$.

$y=1$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي بجوار $+\infty$.

ب) إشارة: $f(x)-y=f(x)-1=\dfrac{2(2x-1)}{e^x-2x+1}$

من إشارة $(2x-1)$ لأن $e^x-2x+1>0$.

$x>\frac{1}{2}$: (C) أعلى (d). ؛ $x<\frac{1}{2}$: (C) أسفل (d). ؛ (C) يقطع (d) عند $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{(e^x+2)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x+2x-1)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{(-4x+6)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$: $+$ $\frac{3}{2}$ $-$

f متزايدة تماما لما $x<\frac{3}{2}$ ، ومتناقصة تماما لما $x\geq\frac{3}{2}$.

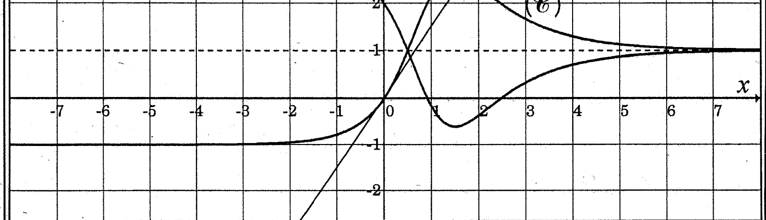
x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$2,6$	$\searrow$	1

3) أ) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{3}{2}$

العدد $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس لـ (C) عند O.

ب) المماس (Δ): $y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{3}{2}x$

4) أ)



$y=\frac{x}{m}$: مستقيمات تشمل النقطة الثابتة O.

$0<\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$ ومنه: $m\in\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$

5) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=(-1)^2-2(-1)=3$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=(1)^2-2(1)=-1$

$g'(x)=2f'(x)\cdot f(x)-2f'(x)=2f'(x)(f(x)-1)$

إشارة $(f(x)-1)$ مذكورة في II-1) ب.

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$1,6$	$\searrow$	-1

III-1) لتكن $I(x_0;y_0)$ نقطة مشتركة لجميع (C_k)

$$y_0=\frac{e^{x_0}+k(-2x_0+1)}{e^{x_0}-2x_0+1}$$

$$k(-2x_0+1)-y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0$$

$\begin{cases}-2x_0+1=0\\ -y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0\end{cases}$ ومنه: $I\left(\frac{1}{2};1\right)$

2)

$$f'_k(x)=\frac{(e^x-2k)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x-2kx+k)}{(e^x-2x+1)^2}$$

$$f'_k(x)=\frac{e^x(-2x+3+2kx-3k)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{e^x(-2x+3-k(-2x+3))}{(e^x-2x+1)^2}$$

$$f'_k(x)=\frac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$$

• $k<1$: إشارة $f'_k(x)$: $+$ $\frac{3}{2}$ $-$

f_k متزايدة تماما على: $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

f_k متناقصة تماما على: $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

• $k>1$: إشارة $f'_k(x)$: $-$ $\frac{3}{2}$ $+$

f_k متزايدة تماما على: $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

f_k متناقصة تماما على: $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

لاحظ: لما $k=1$ ، f_k ثابتة.

3) (C) و (C_{k_0}) متناظران بالنسبة لـ (d)

يعني: $\forall x\in\mathbb{R}\quad \dfrac{f(x)+f_{k_0}(x)}{2}=1$

$$\frac{e^x+2x-1}{e^x-2x+1}+\frac{e^x-2k_0x+k_0}{e^x-2x+1}=2$$

$$2e^x+(2-2k_0)x-1+k_0=2e^x-4x+2$$

$$(2-2k_0)x-1+k_0=-4x+2$$

$\begin{cases}2-2k_0=-4\\ -1+k_0=2\end{cases}$ ومنه: $k_0=3$

"عبد المطلب"

تمرين 2:

I-1) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

2) $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$ ،

ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

3) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ،

$g(2,21) \simeq 0,003 > 0$ و $g(2,2) \simeq -0,01 < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,2 < \alpha < 2,21$.

إشارة $g(x)$: $-$ على $]0;\alpha[$ ، 0 عند α ، $+$ على $]\alpha;+\infty[$

II-1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \infty + \infty = +\infty$ $\quad$ $x=0$ م م ع

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to +\infty}\left(t + \frac{1}{t} - \frac{\ln t^2}{t}\right)$

$= \lim\limits_{t\to +\infty}\left(t + \frac{1}{t} - 2\frac{\ln t}{t}\right) = +\infty$

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

لاحظ: $\left(\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$

$f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-3+\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$: $-$ على $]0;\alpha[$ ، 0 عند α ، $+$ بعدها

f متزايدة تماما لما $x \geq \alpha$ ومتناقصة تماما لما $0<x\leq\alpha$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) $f(x) - \sqrt{x} = \frac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$: $+$ على $]0;e[$ ، 0 عند e ، $-$ بعدها

$x > e$: $(\mathcal{C})$ أسفل (Γ)

$0 < x < e$: $(\mathcal{C})$ أعلى (Γ)

$(\mathcal{C})$ يقطع (Γ) عند $A(e;\sqrt{e})$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - \sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{2\ln t}{t}\right) = 0$

ومنه (Γ) يقارب $(\mathcal{C})$ بجوار $(+\infty)$.

4) أ) $f(\alpha) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ ولدينا $g(\alpha) = 0$ ،

أي $\alpha - 3 + \ln\alpha = 0$ ، $(\ln\alpha = 3 - \alpha)$

$f(\alpha) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3-\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}$

$f(\alpha) = 2\sqrt{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

$2,2 < \alpha < 2,21$ ؛ $1,2 < \alpha - 1 < 1,21$ ؛ $2,4 < 2(\alpha-1) < 2,42$

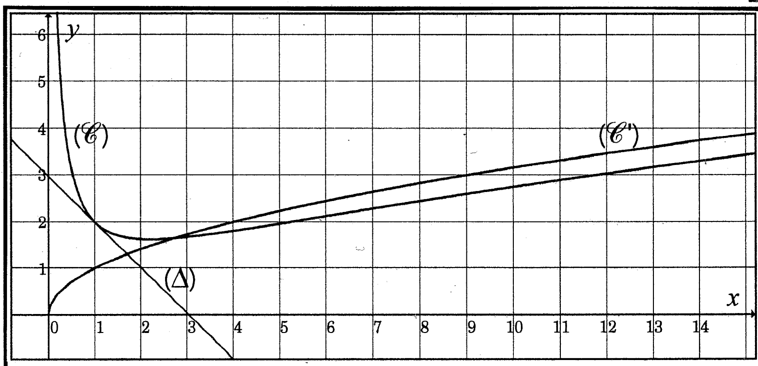
$\sqrt{2,2} < \sqrt{\alpha} < \sqrt{2,21}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{2,21}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\sqrt{2,2}}$ ،

ومنه: $\frac{2,4}{\sqrt{2,21}} < \frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} < \frac{2,42}{\sqrt{2,2}}$ $\quad$ $(1,61 < f(\alpha) < 1,63)$

ب) $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ، $\frac{x_0 - 3 + \ln x_0}{2x_0\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$-3 + \ln x_0 = 0$ ومنه: $(x_0 = e^3)$

5) أ) (Δ): $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -x + 3$



ب) حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع مستقيمات موازية لـ (Δ) ، $m^2 < 3$ أي $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ لا يوجد حلول.

$m^2 = 3$ أي $m = \sqrt{3}$ أو $m = -\sqrt{3}$ يوجد حلا مضاعفا.

$m^2 > 3$ أي $]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$ يوجد حلان.

6) أ) $x > \frac{\alpha}{2}$: $h(x) = f(2x - \alpha)$ ، $h'(x) = 2f'(2x-\alpha)$

$h'(x) = 0$ لما $2x - \alpha = \alpha$ ومنه: $x = \alpha$.

$h'(x) > 0$ ، $f'(2x-\alpha) > 0$ ، $2x - \alpha > \alpha$ ومنه: $x > \alpha$

$h'(x) < 0$ ، $f'(2x-\alpha) < 0$ ، $0 < 2x - \alpha < \alpha$ ومنه: $\frac{\alpha}{2} < x < \alpha$

h متزايدة تماما لما $x \geq \alpha$ ومتناقصة تماما لما $\frac{\alpha}{2} < x \leq \alpha$

ب) من أجل $x \neq \frac{\alpha}{2}$: $\alpha - x \neq \frac{\alpha}{2}$ و $h(\alpha - x) = h(x)$

$x \neq \frac{\alpha}{2}$ ، $-x \neq \frac{-\alpha}{2}$ ومنه: $\alpha - x \neq \frac{\alpha}{2}$.

$h(\alpha - x) = f(|2(\alpha-x)-\alpha|) = f(|-2x+\alpha|) = f(|2x-\alpha|) = h(x)$

x	$-\infty$		0		$\alpha/2$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$x = \frac{\alpha}{2}$ محور تناظر يعني $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ؛ $x_1, x_2 \in D_h$

إذا كان $x_1 = \alpha$ ، $\frac{\alpha + x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ومنه: $x_2 = 0$.

تمرين 3:

1) $g(x) = (x+1)f(x)$ ومنه: $(g(0) = f(0) = 1)$

حل (E) هو: $(x \mapsto Ce^x)$ $C \in \mathbb{R}$ (الحل العام)

بما أن $g(0) = 1$ إذن: $Ce^0 = 1$ ؛ أي $C = 1$

ومنه: $(g(x) = e^x)$

2) لدينا: $f(x) = \frac{g(x)}{x+1} = \frac{e^x}{x+1}$.

$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

f حل لـ (F) يعني: $f' - f = \frac{-e^x}{(x+1)^2}$.

$f'(x) - f(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2} - \frac{e^x}{(x+1)} = \frac{-e^x}{(x+1)^2}$ (محققة)

3) $\begin{cases} h' - h = \frac{e^x}{(x+1)^2} \\ f' - f = -\frac{e^x}{(x+1)^2} \end{cases}$ بالجمع نجد: $(h+f)' - (h+f) = 0$ ومنه: $h + f$ حل لـ (E).

$h(x) + f(x) = Ce^x$ إذن: $h(x) = Ce^x - f(x)$

$h(0) = 0$ ، $C = 1$ ومنه: $\left(h(x) = \frac{xe^x}{x+1}\right)$

"عبد المطلب"