تصحيح الإختبار

التمرين 1 :

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$$

1) $U_1 = 0$ $\quad U_2 = 1$ $\quad U_3 = \frac{3}{2}$

$U_0 < U_1 < U_2 < U_3$ إذن: (U_n) متزايدة تماما

2) البرهان بالتراجع:

- التحقق من صحة $P_{(0)}$: $U_0 < 2$

$-2 < 2 \Rightarrow$ محققة

- نفرض صحة $P_{(n)}$: $U_n < 2$
- نبين صحة $P_{(n+1)}$: $U_{n+1} < 2$

لدينا: $U_n < 2$

$\frac{1}{2}U_n < 1$

$\frac{1}{2}U_n + 1 < 2$

$\boxed{U_{n+1} < 2}$

3) إتجاه التغير:

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + 1 - U_n$

$= \frac{-U_n + 2}{2}$

لدينا: $U_n < 2$

$-U_n > -2$

$-U_n + 2 > 0$

$\frac{-U_n + 2}{2} > 0$ $\Leftarrow$ (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

التقارب:

بما أن (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى $(U_n < 2)$

إذن: هي متقاربة.

4) $V_n = 2U_n - 4$

$V_{n+1} = qV_n$

$V_{n+1} = 2U_{n+1} - 4$

$= 2\left(\frac{1}{2}U_n + 1\right) - 4 \Rightarrow = U_n + 2 - 4$

$= U_n - 2 \Rightarrow = \frac{1}{2}(2U_n - 4)$

$= \frac{1}{2}V_n$

$V_0 = 2U_0 - 4 = 2(-2) - 4 = \boxed{-8}$

$V_n = V_p \times q^{n-p} \Rightarrow = V_0 \times q^{n-0}$

$\boxed{V_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$V_n = 2U_n - 4 \Rightarrow V_n + 4 = 2U_n$

$U_n = \frac{V_n + 4}{2}$

$U_n = \frac{-8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4}{2} \Rightarrow \boxed{U_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

النهاية:

$\lim_{n \to +\infty} -4\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{0} + 2 \boxed{= 2}$

5) المجموع:

$V_1 + V_2 + \dots + V_n$

$= V_1\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) \Rightarrow = -4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)$

$= -4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \times \frac{2}{1} \Rightarrow = -8\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$U_n = \frac{V_n + 4}{2} = \frac{1}{2}V_n + 2$

$= \frac{1}{2}V_1 + 2 + \frac{1}{2}V_2 + 2 + \dots + \frac{1}{2}V_n + 2$

$= \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2 + \dots + \frac{1}{2}V_n + 2 + 2 + \dots + 2$

$= \frac{1}{2}(V_1 + V_2 + \dots + V_n) + 2n$

$= \frac{1}{2}\left[-8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right] + 2n$

$\boxed{= -4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 2n}$

$$V_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow V_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$ ①

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n \qquad \boxed{q=\frac{1}{2}}$$

$$V_0=\left(\frac{1}{2}\right)^0=\boxed{1}$$

$$T_n=V_0+V_1+\dots+V_n$$ ②

$$=V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\times\frac{2}{1}$$

$$\boxed{=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

التمرين 3 :

$$f(x)=a+\frac{b}{x^2-2x-3}$$

تعيين a و b :

$$f(-3)=0 \;/\; f(1)=4$$

$$\to f(-3)=a+\frac{b}{12}=0$$

$$\to f(1)=a+\frac{b}{-4}=4 \Rightarrow 1+\frac{b}{-4}=4$$

$$\frac{b}{-4}=3 \Rightarrow b=3\times-4 \Rightarrow \boxed{b=-12}$$

بالتعويض نجد :

$$a+\frac{-12}{12}=0 \Rightarrow a-1=0$$

$$\boxed{a=1}$$

$$f(x)=1+\frac{-12}{x^2-2x-3}$$

① التحقق :

$$f(x)=\frac{1(x^2-2x-3)-12}{x^2-2x-3}$$

$$\boxed{=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}}$$

② النهايات :

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\boxed{1}$$

$y=1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ و $-\infty$

التمرين 2 :

$$\begin{cases} U_0-5U_1=22 \\ -U_0=8+U_2 \end{cases}$$

$$-8=U_0+U_2 \Rightarrow -8=2U_1$$ ①

$$\boxed{U_1=-4}$$

$$U_0-5(-4)=22 \Rightarrow U_0+20=22$$

$$\boxed{U_0=2}$$

$$U_1=U_0+r \Rightarrow -4=2+r$$ ②

$$\boxed{r=-6}$$

$$U_n=U_p+(n-p)r$$

$$=U_0+(n-0)r \Rightarrow =2+(n)(-6)$$

$$\boxed{=-6n+2}$$

$$S_n=U_0+U_1+\dots+U_n$$ ③

$$=\frac{n+1}{2}(U_0+U_n)$$

$$=\frac{n+1}{2}(2+-6n+2)$$

$$=\frac{(n+1)}{\cancel{2}}(-3n+2)\times\cancel{2}$$

$$\boxed{=(n+1)(-3n+2)}$$

$$P_n=3^2\times3^{-4}\times3^{-10}\times\dots\times3^{-6n+2}$$ ④

$$=3^{U_0}\times3^{U_1}\times3^{U_2}\times\dots\times3^{U_n}$$

$$=3^{S_n}$$

$$\boxed{=3^{(n+1)(-3n+2)}}$$

$$V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}U_n+\frac{2}{6}}$$

$$V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-U_n+2}{6}} \Rightarrow =\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\cancel{6}n-\cancel{2}+\cancel{2}}{\cancel{6}}}$$

$$\boxed{V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow$	$4 \nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty \nearrow$	1

⑤ $x=1$ محور تناظر:

$f(2a-x)=f(x) \Rightarrow f(2-x)=f(x)$

$$f(2-x)=1-\frac{12}{(2-x)^2-2(2-x)-3}$$

$$=1-\frac{12}{\cancel{4}+x^2-4x-\cancel{4}+2x-3}$$

$$=1-\frac{12}{x^2-2x-3}=f(x)$$

⑥ معادلة المماس عند $(5;0)$:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$=f'(5)(x-5)+f(5) \Rightarrow =\frac{2}{3}(x-5)+0$

$$\boxed{y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}}$$

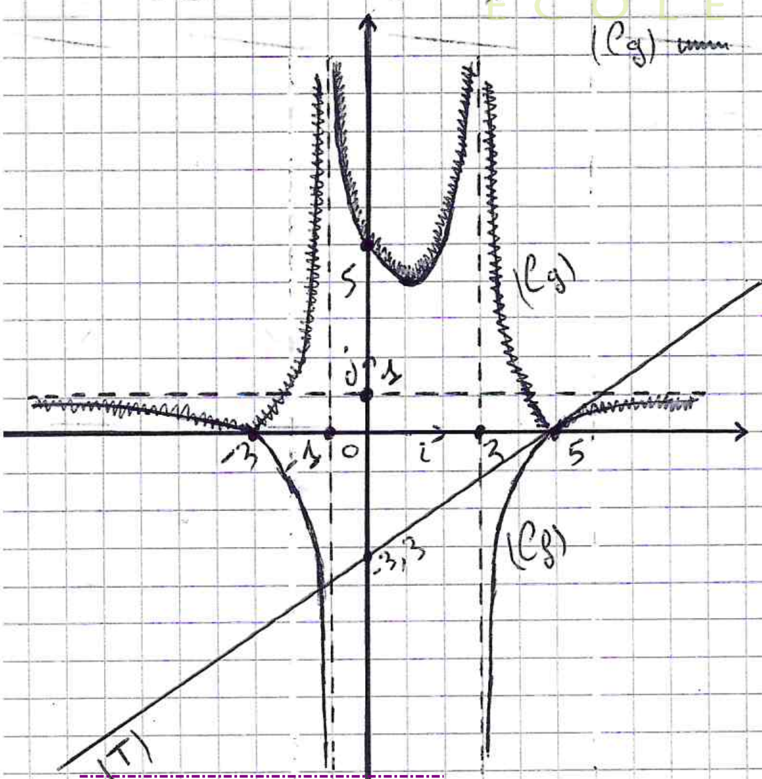
⑦ التراتيب: $f(0)=5$ $(0;5)$

الفواصل: $f(x)=0$ $x^2-2x-15=0$

$x_1=5$ $(5;0)$ $x_2=-3$ $(-3;0)$

⑧ إنشاء المنحنى (C) والمماس (T) و (C_g):

(C_g)



	$+$	0 $-$	0	$+$
		-1	3	

$\lim_{x \to -1^<} f(x)=-\infty$ $\begin{cases} \lim_{x \to -1^<} x^2-2x-15=-12 \\ \lim_{x \to -1^<} x^2-2x-3=0 \end{cases}$

$\lim_{x \to -1^>} f(x)=+\infty$ $\begin{cases} \lim_{x \to -1^>} x^2-2x-15=-12 \\ \lim_{x \to -1^>} x^2-2x-3=0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 3^<} f(x)=+\infty$ $\begin{cases} \lim_{x \to 3^<} x^2-2x-15=-12 \\ \lim_{x \to 3^<} x^2-2x-3=0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 3^>} f(x)=-\infty$ $\begin{cases} \lim_{x \to 3^>} x^2-2x-15=-12 \\ \lim_{x \to 3^>} x^2-2x-3=0 \end{cases}$

$x=-1$ مستقيم مقارب عمودي

$x=3$ مستقيم مقارب عمودي

③ الوضعية بالنسبة للمستقيم (Δ) $y=1$:

$$f(x)-y=\cancel{1}+\frac{-12}{x^2-2x-3}-\cancel{1}$$

$$=\frac{-12}{x^2-2x-3}$$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
-12	$-$		$-$		$-$
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{-12}{x^2-2x-3}$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$
الوضعية	تحت	$\Vert$	فوق	$\Vert$	تحت

① بيان أن:

$$f'(x)=\frac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$

f متناقصة تماما $]-\infty;-1[$ و $]-1;1]$

f متزايدة تماما $[1;3[$ و $]3;+\infty[$

II - g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $g(x)=|f(x)|$

① إشارة f:

x	$-\infty$		-3		-1		3		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة g دون رمز القيمة المطلقة:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) &]-\infty;-3]\cup]-1;3[\cup[5;+\infty[\\ -f(x) & [-3;-1[\cup]3;5] \end{cases}$$

② جدول تغيرات g:

x	$-\infty$	-3	-1	1	3	5	$+\infty$
$g(x)$	1 ↘	0 ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	0 ↗	1

④ حل جبريا في $\mathbb{R}$ المعادلة: $g(x)=\dfrac{20}{x^2-2x-3}$

$$|f(x)|=\frac{20}{x^2-2x-3}$$

$$-f(x)=\frac{20}{x^2-2x-3} \qquad\qquad f(x)=\frac{20}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{-x^2+2x+15}{\cancel{x^2-2x-3}}=\frac{20}{\cancel{x^2-2x-3}} \qquad\qquad \frac{x^2-2x-15}{\cancel{x^2-2x-3}}=\frac{20}{\cancel{x^2-2x-3}}$$

$$-x^2+2x+15=20 \qquad\qquad x^2-2x-15=20$$

$$-x^2+2x+15-20=0 \qquad\qquad x^2-2x-15-20=0$$

$$-x^2+2x-5=0 \qquad\qquad x^2-2x-35=0$$

لا يوجد حلول

$$x_1=7 \qquad x_2=-5$$

Bouchachia