تصحيح إختبار الفصل الثاني 2023م

"عبد المطلب"

تمرين 1 :

1) أ) $n=0$: $u_0=2$ ، ومنه $2\leq u_0\leq e$ (محققة)

نفرض أن $2\leq u_n\leq e$ من أجل n كيفي ونبرهن صحة $2\leq u_{n+1}\leq e$. لدينا $2\leq u_n\leq e$ ،

$-e\leq -u_n\leq -2$ ؛ $0\leq e-u_n\leq e-2$ ؛

$0\leq (e-u_n)^2\leq (e-2)^2$ ؛ $-(e-2)^2\leq -(e-u_n)^2\leq 0$

$2\leq e-(e-2)^2\leq e-(e-u_n)^2\leq e$ (محققة)

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $2\leq u_n\leq e$

ب) $u_{n+1}-u_n=e-(e-u_n)^2-u_n=e-u_n-(e-u_n)^2$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=(e-u_n)(1-e+u_n)$

جـ) لدينا : $2\leq u_n\leq e$ ؛ $2-e\leq -e+u_n\leq 0$

$1\geq 1-e+u_n\geq 3-e\geq 0$ ؛ وسابقا : $0\leq e-u_n\leq e-2$ ؛

إذن : $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ، ومنه (u_n) متزايدة .

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ ، $\ell=e-(e-\ell)^2$ ؛

$(e-\ell)(1-e+\ell)=0$ ومنه : $\ell=e$ لأن $2\leq\ell\leq e$

2) أ) لدينا : $0\leq e-u_n\leq e-2$ ، نضرب في $(e-u_n)$

نجد : $(e-u_n)^2\leq(e-2)(e-u_n)$. $(e-u_{n+1})$

ب) لدينا : $e-u_n\geq 0$ محققة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

نبرهن بالتراجع على : $e-u_n\leq(e-2)^{n+1}$.

$n=0$: $e-u_0=e-2$ و $e-2\leq(e-2)^1$ (محققة)

نفرض أن $e-u_n\leq(e-2)^{n+1}$ من أجل n كيفي ، ونبرهن $e-u_{n+1}\leq(e-2)^{n+2}$. لدينا :

$e-u_n\leq(e-2)^{n+1}$ ، نضرب في $(e-2)$:

$(e-2)(e-u_n)\leq(e-2)^{n+1}$ ؛ ولدينا ،

$e-u_{n+1}\leq(e-2)(e-u_n)$ ومنه : $(e-u_{n+1})\leq(e-2)^{n+2}$

ومنه : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ؛ $(e-u_n)\leq(e-2)^{n+1}$.

بما أنّ : $0\leq e-2\leq 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(e-2)^{n+1}=0$

باستعمال مبرهنة الحصر : $\lim\limits_{n\to+\infty}(e-u_n)=0$

ومنه ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$

3) أ) $V_n=n(e-2)^{2^n}$ يعني : $(e-u_n)=(e-2)^{2^n}$

$n=0$: $(e-u_0)=(e-2)^1$ محققة لأن $u_0=2$.

نفرض أن $(e-u_n)=(e-2)^{2^n}$ من أجل n كيفي ونبرهن صحة ، $(e-u_{n+1})=(e-2)^{2^{n+1}}$.

لدينا : $(e-u_n)=(e-2)^{2^n}$. بتربيع الطرفين ؛

$(e-u_n)^2=((e-2)^{2^n})^2$ أي : $(e-u_n)^2=(e-2)^{2\cdot 2^n}$

$(e-u_{n+1})=(e-2)^{2^{n+1}}$ ؛ محققة .

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(e-u_n)=(e-2)^{2^n}$

ب) $2^n\geq n$ ومنه : $(e-2)^{2^n}\leq(e-2)^n$ لأن :

$0\leq e-2\leq 1$ ، في الأخير : $0\leq n(e-2)^{2^n}\leq n(e-2)^n$

السؤال الإضافي : $\lim\limits_{n\to+\infty}n(e-2)^n=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{te^t}{\ln(e-2)}=0$

لأن $t=\ln(e-2)^n$ أي $e^t=(e-2)^n$ (ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$: مبرهنة الحصر)

يمكن استعمال ع-ب

تمرين 2 :

1) $P_1=\frac{C_1^1\times C_2^1\times C_1^1\times C_4^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{105}$

2) $P_2=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{14}$

3) $P_3=1-P_2=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

4) A : سحب قريصة واحدة تحمل حرف الألف .

B : سحب 4 قريصات تحمل حروفا مختلفة مثنى مثنى .

$A\cap B$: أ ت ل ح | أ ت ل م | أ ح م ت | أ ح م ل |

B : أ ت ل ح | أ ت ل م | أ ح م ت | أ ح م ل | ت ل ح م | ،

$P(A\cap B)=\frac{C_4^1(2C_2^1C_2^1C_1^1+2C_1^1C_1^1C_2^1)}{C_{10}^4}=\frac{8}{35}$

$P(B)=\frac{C_4^1(2C_2^1C_2^1C_1^1+2C_1^1C_1^1C_2^1)+C_2^1C_2^1C_1^1C_1^1}{C_{10}^4}=\frac{26}{105}$

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{12}{13}$

5) $X=\{0;1;2;3;4\}$

$P(X=0)=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{14}$

$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_6^3}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$

$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_6^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7}$

$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_6^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{35}$

$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

$E(X)=0+\frac{8}{21}+\frac{6}{7}+\frac{12}{35}+\frac{4}{210}=\frac{8}{5}$

6) أ) $P_4=\frac{A_2^1\cdot A_2^1\cdot A_4^1\cdot A_1^1}{A_{10}^4}=\frac{1}{315}$

ب) 2أ و2ل أو 3أ و1ل

$6\cdot A_4^2\cdot A_2^2+4A_4^3\cdot A_2^1=336$

ل ل أ أ   أ أ ل ل

أ ل أ ل   ل أ ل أ

أ ل ل أ   ل أ أ ل

ل أ أ أ

أ ل أ أ

أ أ ل أ

أ أ أ ل

تمرين 3:

1) الإجابة الصحيحة هي جـ لأنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x-1} = 0$$

2) الإجابة الصحيحة هي أ) لأنّ: $G(\frac{3}{2}) = 0$ ؛

$$G'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{2}{2x-2}\ln(2x-2) = \frac{\ln(2x-2)}{x-1}$$

3) الإجابة الصحيحة هي جـ) لأنّ: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n$

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ ، $u_n = u_0\cdot q^n = (\frac{2}{5})^n$

$(\frac{2}{5})^n \leq 10^{-6}$ ، $(\frac{5}{2})^n \geq 10^6$ ؛ $\log(\frac{5}{2})^n \geq \log 10^6$ ،

$n\log\frac{5}{2} \geq 6$ ؛ $n \geq 15,08$ ومنه: $n=16$

4) الإجابة الصحيحة هي ب) لأنّ: h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = x+1+\ln(e^x+1)$ ، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$h'(x) = 1+\frac{e^x}{e^x+1} > 0$. h متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ؛

$\lim_{x\to-\infty}h(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}h(x) = +\infty$ ، و h مستمرة

ومنه: $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$.

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to0}f(x) = +\infty$ ؛ لأنّ $\lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty$

و $\lim_{x\to0}\frac{-5x+1}{x(x+1)} = +\infty$

المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{5}{x}+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right] = 0$$

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$.

2) أ) f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{-5(x^2+x)-(2x+1)(-5x+1)}{x^2(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{5x^2-2x-1+x^2(x+1)-x(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2-3x-1}{x^2(x+1)^2} = \frac{(x-1)(4x+1)}{x^2(x+1)^2}$$

ب) $4x+1>0$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x-1$ ،

$x>1$: $f'(x)>0$ ؛ f متزايدة تماما.

$0<x<1$: $f'(x)<0$ ، f متناقصة تماما.

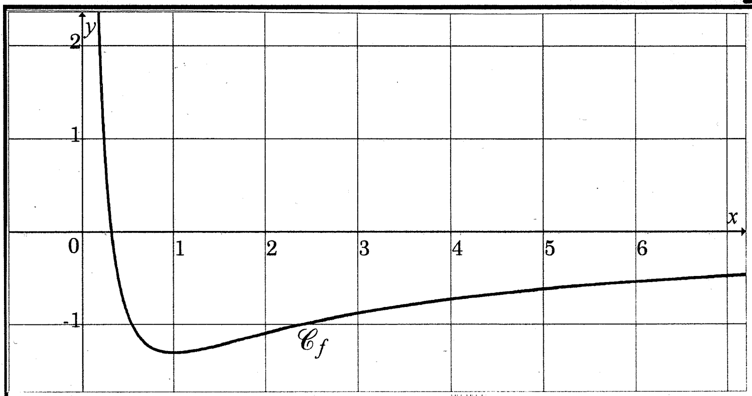
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2+\ln 2$	↗	0

$f'(x)=0$ من أجل $x=1$

3) أ) f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0;1[$ ؛

$f(0,3) \simeq 0,18 > 0$ ، $f(0,4) \simeq -0,53 < 0$ ؛ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ ؛ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$ ؛ حيث $0,3<\alpha<0,4$ ؛

ب) α يمثل فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.



4) g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

$$g'(x) = \frac{-5x+1}{x(x+1)} + \ln(x+1) - \ln x - \ln m = f(x) - \ln m$$

مماس يوازي $(x'ox)$: $g'(x) = 0$ أي $f(x) = \ln m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع $y=\ln m$.

$\ln m < -2+\ln 2$ أي $m<2e^{-2}$ ، لا يوجد مماس

$\ln m = -2+\ln 2$ أي $m=2e^{-2}$ ؛ يوجد مماس وحيد

$-2+\ln 2 < \ln m < 0$ أي $2e^{-2}<m<1$ ؛ يوجد مماسان

$\ln m \geq 0$ أي $m\geq 1$ ، يوجد مماس وحيد.

II-1)

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_1^2 h(x)\,dx = \left[x\ln(1+\tfrac{1}{x})\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\int_1^2 h(x)\,dx = \left[x\ln(1+\tfrac{1}{x}) + \ln(x+1)\right]_1^2 = 3\ln 3 - 4\ln 2$$

2) $$h(x) - h'(x) - \frac{5}{x+1} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{5}{x+1}$$

$$= \ln(x+1) - \ln x + \frac{-5x+1}{x(x+1)} = f(x)$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 h(x)\,dx - \int_1^2 h'(x)\,dx - \int_1^2 \frac{5}{x+1}\,dx$$

$$= 3\ln 3 - 4\ln 2 - [h(x)]_1^2 - 5[\ln(x+1)]_1^2 = 3\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

3) $$A = \int_1^2 -f(x)\,dx = 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) u.a$$

III-1) $$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)}$$

من أجل كل $n>0$ ، $(1+\frac{1}{n}) > 1$ ؛ ومنه: $\ln(1+\frac{1}{n})>0$

كذلك $\frac{1}{n(n+1)}>0$ و منه: $u_n > 0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

2) لتكن K الدالة المرفقة والمعرفة على $]0;+\infty[$.

$K(x) = h(x) - h'(x)$ ومنه: $K'(x) = h'(x) - h''(x)$

$$K'(x) = -\left(\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\right) < 0$$

K متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه (u_n) متناقصة.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3) أ) $$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} = \ln(n+1) - \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ب)

$$\begin{aligned} S_n = {} & \cancel{\ln 2} - \ln 1 + \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \\ & + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \\ & + \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 3} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} \\ & \vdots \\ & + \ln(n+1) - \cancel{\ln n} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$S_n = \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1} = \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}$$

عبد المطلب