تصحيح الامتحان الثاني: 3 ت ر

تمرين 01:

1) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلان هما $\ln 4$ و 0

2) (C_f) تقبل مماس عند 0 معادلته
$y=-3x$

3) الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم عند 0 هي
$F(x)=e^{x}-4e^{-x}-5x+3$

4) القيمة المتوسطة m للدالة f هي

$$m=e-\frac{4}{e}-2$$

ت 02:

$$\begin{cases} U_0=12 \\ U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+1 \end{cases}$$

1) البرهان أن $U_n>3$

$P(0)$: $U_0>3$ ، $12>3$ محققة $P(0)$

$P(n)$: $U_n>3$

$P(n+1)$: $U_{n+1}>3$

لدينا $U_n>3 \Rightarrow \frac{2}{3}U_n>2 \Rightarrow \frac{2}{3}U_n+1>3$

ومنه $P(n)$ محققة من أجل كل n عدد طبيعي.

2) اتجاه التغير: $U_{n+1}-U_n=\frac{2}{3}U_n+1-U_n$

$=-\frac{1}{3}U_n+1$

لدينا $U_n>3 \Rightarrow -\frac{1}{3}U_n<-1 \Rightarrow -\frac{1}{3}U_n+1<0$

وبالتالي (U_n) متناقصة تماما.

التقارب: بما أن (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 3 إذن (U_n) متقاربة.

$$V_n=U_n+\alpha$$

قيمة α:

$$V_{n+1}=U_{n+1}+\alpha=\frac{2}{3}U_n+1+\alpha$$

$$=\frac{2}{3}(V_n-\alpha)+1+\alpha$$

$$=\frac{2}{3}V_n+\frac{-2\alpha+3+3\alpha}{3}$$

$$=\frac{2}{3}V_n+\frac{\alpha+3}{3}$$

$$\alpha+3=0$$

$$\boxed{\alpha=-3}$$

$$V_0=U_0-3=12-3=\boxed{9}$$

عبارة V_n:

$$V_n=V_0\cdot q^n=9\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

عبارة U_n:

$$U_n=V_n+3$$

$$=9\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}9\left(\frac{2}{3}\right)^n+3=3$$

$$W_n=\ln(V_n)$$

$$W_{n+1}=\ln(V_{n+1})$$

$$W_{n+1}-W_n=\ln(V_{n+1})-\ln V_n$$

$$=\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

حسابية أساسها $\ln\frac{2}{3}$.

المجموع:

$$S_n=V_0+V_1+\dots+V_n$$

$$=V_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)=9\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{3}-1}\right)$$

$$=-27\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)$$

الجداء:

$$P_n=(U_0-3)\times(U_1-3)\times\dots\times(U_n-3)$$

$$=V_0\times V_1\times\dots\times V_n$$

$$=9\left(\frac{2}{3}\right)^0\times 9\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\dots\times 9\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=9^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1+\dots+n}$$

$$=9^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{(n+1)(n)}{2}}$$

ت 03:

إشارة $f'(x)$:

x		-2		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

جدول تغيرات f:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

إشارة $f(x)$:

x		-2		1	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

دراسة الوضع النسبي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
الوضعية	(C_f) تحت (T)	(T) تخترق (C_f)	(C_f) فوق (T)

x	0		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+\infty \searrow -\infty$	

$g(1)=0$

إشارة $g(x)$

x		1	
$g(x)$	$+$	0	$-$

$f(x)=\dfrac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x+2e)=0$

$y=-2x+2e$ م.م مائل بجوار $+\infty$:

الوضعية:

x	0		e		$+\infty$
الوضعية	‖	(C_f) تحت (Δ)	تقاطع	(C_f) فوق (Δ)	

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

اتجاه تغير f:

لدينا $x^2>0$ إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

f متزايدة تماما على $]0,1]$ و متناقصة تماما على $[1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$2,4$	$\searrow$	$-\infty$

تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α: $0,4<\alpha<0,5$

f مستمرة و متزايدة تماما على $]0,1]$ و

$f(0,4)\times f(0,5)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا له.

$I=\int_1^2 \dfrac{-1+\ln x}{x}\,dx=\left[-\ln x+\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2=-0,45$

المساحة:

$S=\int_1^2 f(x)\,dx \simeq 1,98\ u.a$

$f(-1)=-2$ ، $f'(-1)=-3$

$f''(-1)=0$ (نقطة انعطاف)

$g(x)=[f(x)]^2$

$g'(x)=2f'(x)\cdot f(x)$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$2f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$]-\infty,-2]$ و $[0,1]$ متناقصة تماما

$[-2,0]$ و $[1,+\infty[$ متزايدة تماما .

$f(x)=ax^3+bx^2-4$

$f(-1)=-2$

$f'(-1)=-3$

$-a+b-4=-2$

$\boxed{-a+b=2}$

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$\boxed{3a-2b=-3}$

$\begin{cases}-2a+2b=4\\ 3a-2b=-3\end{cases}$

بالجمع: $\boxed{a=1}$

بالتعويض: $\boxed{b=3}$

ت 04:

$g(x)=-2x^2+2-\ln x$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$g'(x)=-4x-\dfrac{1}{x}<0$

g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$