التمرين الأول :

1) $V_{n+1} = \frac{3}{U_{n+1}-1}$

$V_{n+1} = \frac{3}{4U_n-3-1}$

$V_{n+1} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{U_n-1}$

$V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n$

(V_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$.

2) $V_0 = \frac{3}{U_0-1} = \frac{3}{4}$ ومنه $V_n = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n$

3) لدينا : $V_n = \frac{3}{U_n-1}$ ومنه $\frac{U_n-1}{3} = \frac{1}{V_n}$

أي $U_n - 1 = \frac{3}{V_n}$ نجد : $U_n = \frac{3}{V_n}+1$

في الأخير : $U_n = \frac{3}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n}+1$

$\lim U_n = +\infty$ لأن $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

4) $S_n = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$

$S_n = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$S'_n = U_0+U_1+\dots+U_n$

$S'_n = \frac{3}{V_0}+1+\frac{3}{V_1}+1+\dots+\frac{3}{V_n}+1$

$S'_n = 3\underbrace{\left(\frac{1}{V_0}+\frac{1}{V_1}+\dots+\frac{1}{V_n}\right)}_{\text{م.م. هندسية أساسها 4 وحدها الأول } \frac{4}{3}} + \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1 \text{ مرة}}$

$S'_n = 3\left(\frac{4}{3}+\frac{16}{3}+\dots+\left(\frac{4}{3}\right)4^n\right)+n+1$

$S'_n = 4\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right)+n+1$

$S'_n = \frac{4}{3}\left(4^{n+1}-1\right)+n+1$

$P_n = (U_0-1)(U_1-1)\times\dots\times(U_n-1)$

$P_n = \frac{3}{V_0}\times\frac{3}{V_1}\times\dots\times\frac{3}{V_n}$

$P_n = \frac{3^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^0\times\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\dots\times\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

$P_n = \frac{3^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+\dots+n}}$

$P_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}} = 4^{\frac{n^2+3n+2}{2}}$

التمرين الثاني :

I) 1)

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$ (متعامدان)

$\vec{AB}\cdot\vec{BC} = \vec{AB}\cdot\vec{BA} = -AB^2 = -16$

$\vec{AI}\cdot\vec{CJ} = \vec{AI}\cdot\vec{AI} = AI^2 = 4$ ($\vec{AI}$ هو المسقط العمودي لـ $\vec{CJ}$ على (AI))

$\vec{AC}\cdot\vec{JI} = -AC\times JI = -8$

$\vec{AC}\cdot\vec{ID} = AC\times ID\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -8$

$\vec{AJ}\cdot\vec{ID}=0$ (متعامدان)

II) 1) $\vec{AB}\binom{3}{4}$ و $\vec{AC}\binom{4}{-3}$ ، $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=12-12=0$

$\|\vec{AB}\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ، $\|\vec{AC}\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

2) (C) مركزها $A(-2,-1)$ نصف قطرها $r=AB=5$

ومنه $(C): (x+2)^2+(y+1)^2=25$

3) أ) $(\Delta): -3x-4y+c=0$

نعوض بإحداثيات B نجد : $c=15$

ومنه $(\Delta): 3x+4y-15=0$

$d((\Delta),A) = \frac{|3(-2)+4(-1)-15|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 = r$

ومنه (Δ) مماس لـ(C)

ب) $\vec{u}$ شعاع ناظمي لـ (Δ) و(Δ')

ومنه معادلتها من الشكل $4x-3y+c=0$

(Δ') و (Δ'') يمسان $(\mathcal{C})$ معناه

$$d(\Delta';A)=d(\Delta'',A)=\frac{|4(-2)-3(-1)+c|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$$

ومنه
$$|-5+c|=25$$

$-5+c=25$ $\qquad$ $-5+c=-25$

$c=30$ $\qquad$ $c=-20$

في الأخير:

$(\Delta'): 4x-3y+30=0$ $\qquad$ $(\Delta''): 4x-3y-20=0$

4)
$$\begin{cases} x+2y-1=0 & \text{--- ①} \\ (x+2)^2+(y+1)^2=25 & \text{--- ②} \end{cases} \Leftarrow x=1-2y$$
نعوض في ②

$$(3-2y)^2+(y+1)^2=25$$

ننشر ونبسط نجد: $y^2-2y-3=0$

تقبل حلين:

$y=-1$ ونجد $x=3$ $\qquad$ $y=3$ ونجد $x=-5$

ومنه $(3,-1)$ و $(-5,3)$ هما نقطتي التقاطع.

5)
$$x^2+y^2+2mx+m=0$$

$a=2m$

$b=0$

$c=m$

$$\frac{a^2+b^2-4c}{4}=m^2-m$$

m	$-\infty$		0		1		$+\infty$
m^2-m		$+$	0	$-$	0	$+$	

$m\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$: دائرة مركزها $\Omega(-m,0)$

نصف قطرها $\sqrt{m^2-m}$

$m\in]0,1[$: مجموعة خالية

$m=1$ النقطة $(-1,0)$

$m=0$: النقطة $(0,0)$

التمرين الثالث:

1) أ)
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$

ب)
$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

(Δ) مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$

ويقبل $(\mathcal{C}_f)$ مستقيمين أفقيين هما $x=1$ و $x=-1$

ج) الوضعية

$$f(x)-y=\frac{x}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$x\in]-\infty;-1[\cup]0;1[$ $\quad$ $(\mathcal{C})$ تحت (Δ)

$x\in]-1;0[\cup]1,+\infty[$ $\quad$ $(\mathcal{C})$ فوق (Δ)

$x=0$ $\quad$ $(\mathcal{C})$ يتقاطع (Δ) عند $A(0,1)$

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2x)(x^2-1)-(2x)(x^3+x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

ب)

	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty,-\sqrt{3}]$ و $[\sqrt{3},+\infty[$

f متناقصة تماما على المجالات $[-\sqrt{3},-1[$ ، $]-1,1[$ و $]1,\sqrt{3}]$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1,6$	$\searrow$	$-\infty \| +\infty$		$\searrow$		$-\infty \| +\infty$	$\searrow$	$3,6$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) $f'(x)=-2$

$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=-2$$

نبسط نجد $3x^4-7x^2+2=0$

بوضع $X=x^2$ $\qquad$ $3X^2-7X+2=0$

تقبل حلين

$X=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $X=2$

$x^2=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x^2=2$

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$

ومنه $(\mathcal{C})$ يقبل أربع مماسات ميلها -2.

ب) $f'(x)$ تنعدم عند $x_0=0$ وتغير إشارتها

ومنه $(\mathcal{C}_f)$ تقبل نقطة انعطاف هي $A(0,1)$

4) أ)
$$f(-x)+f(x)=\frac{-x^3+x^2-1}{x^2-1}+\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$
$$=\frac{2x^2-2}{x^2-1}=2$$

بما أن $f(-x)+f(x)=2$

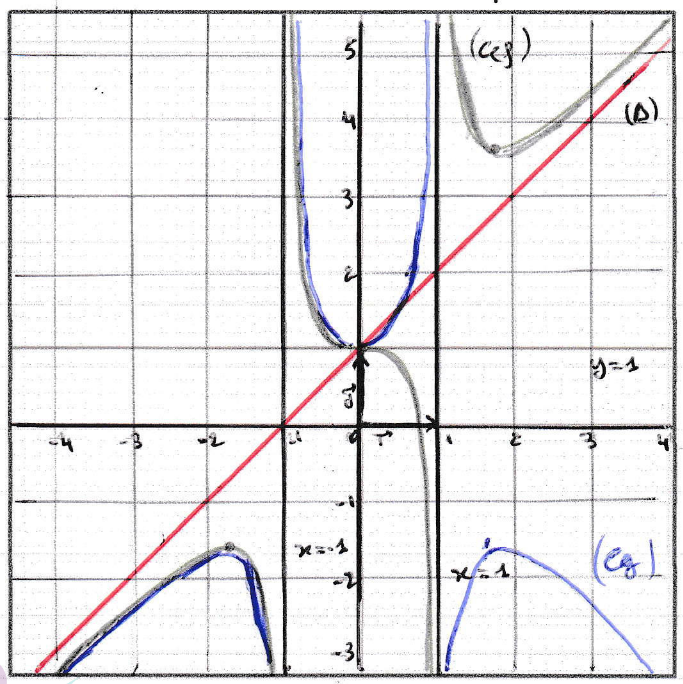
فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مركز تناظر هي النقطة $A(0,1)$

ب) معادلة (T):

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y=0(x-0)+1$$
$$y=1$$

(T) هو مماس أفقي.

* الرسم :



2)

$$x^3+mx^2+x^2-m-1=0$$

$$x^3+x^2-1=-mx^2+m$$

$$x^3+x^2-1=(x^2-1)(-m)$$

$$\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}=-m$$

$$f(x)=-m$$

مناقشة أفقية (تقاطع (Cf) مع المستقيمات $(y=-m$

* لما $-m<1-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ أي $m>\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$ ثلاث حلول ، حلين سالبين وحل موجب
* لما $-m=1-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ أي $m=\frac{3}{2}\sqrt{3}+1$ حلين أحدهما موجب والآخر مضاعف سالب
* لما $1-\frac{3}{2}\sqrt{3}<-m<1$ أي $-1<m<\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$ حل وحيد موجب
* لما $-m=1$ أي $m=-1$ حل وحيد معدوم
* لما $1<-m<1+\frac{3}{2}\sqrt{3}$ أي $-1-\frac{3}{2}\sqrt{3}<m<-1$ حل وحيد سالب
* لما $-m=\frac{3}{2}\sqrt{3}+1$ أي $m=-\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$ حلين أحدهما سالب والآخر مضاعف موجب
* لما $-m>1+\frac{3}{2}\sqrt{3}$ أي : $m<-\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$ ثلاث حلول ، حلين موجبين وحل سالب

5) أ) مجموعة تعريف الدالة g متناظرة بالنسبة للصفر

$$g(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=g(x)$$

ومنه g دالة زوجية

ب)

$$g(x)=\begin{cases} f(-x)=\dfrac{-x^3+x^2-1}{x^2-1} & \text{لما } 1>x\geq 0 \text{ أو } x>1 \\ f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1} & \text{لما } -1<x<0 \text{ أو } x<-1 \end{cases}$$

ج)

لما $x\in]-\infty;-1[\cup]-1,0[$ (C_g) منطبق على (C_f)

لأن $g(x)=f(x)$

ولما $x\in[0,1[\cup]1,+\infty[$ ، بما أن g زوجية فإن (C_g) يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

انتهى

الأستاذ بن مسعود

3