التمرين 1: الموضوع الأول

1) أ- تعيين عدد المصابين:

$\bullet\ U_2 = U_1\left(1+\frac{a}{100}\right)-13$

$= 180\left(1+\frac{20}{100}\right)-13$

$U_2 = 203$

$\bullet\ U_3 = U_2\left(1+\frac{a}{100}\right)-13$

$= 203\left(1+\frac{20}{100}\right)-13$

$U_3 = 230$

$\bullet\ U_4 = U_3\left(1+\frac{a}{100}\right)-13$

$= 230\left(1+\frac{20}{100}\right)-13$

$U_4 = 263$

ب- هل $(U_n)$ هندسية:

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{230}{203} = 1,133$

$\frac{U_1}{U_0} = \frac{203}{180} = 1,127$

أي $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ $1,127 \neq 1,133$

ومنه $(U_n)$ ليست هندسية

- هل $(U_n)$ حسابية:

$U_2 - U_1 = 230 - 203 = 27$

$U_3 - U_0 = 263 - 180 = 83$

أي $U_3 - U_0 \neq U_2 - U_1$ $83 \neq 27$

ومنه $(U_n)$ ليست حسابية

جـ- بيان:

$U_{n+1} = U_n\left(1+\frac{a}{100}\right)-13$

$= U_n\left(1+\frac{20}{100}\right)-13$

$U_{n+1} = \frac{6}{5}U_n - 13$

د- برهان بالتراجع أن $(U_n)$ متزايدة:

$U_{n+1} - U_n > 0$

$\frac{6}{5}U_n - 13 - U_n > 0$

$\frac{1}{5}U_n - 13 > 0$

$\frac{1}{5}U_n > 13$

$U_n > 65$

2) نضع: $V_n = U_n - 65$

أ-

$V_{n+1} = U_{n+1} - 65$

$= \frac{6}{5}U_n - 13 - 65$

$= \frac{6}{5}U_n - 78$

$V_{n+1} = \frac{6}{5}(U_n - 65)$

ومنه: $(V_n)$ هندسية أساسها $q = \frac{6}{5}$

- الحد الأول:

$V_0 = U_0 - 65 = 115$

ب- عبارة $V_n$ بدلالة $n$:

$V_n = V_p \times q^{(n-p)}$

$= V_0 \times q^{(n-0)}$

$V_n = 115\left(\frac{6}{5}\right)^n$

- عبارة $U_n$ بدلالة $n$:

$U_n = V_n + 65$

$= 115\left(\frac{6}{5}\right)^n + 65$

جـ- عدد المصابين يوم 30 أفريل 2020:

$U_{30} = 115\left(\frac{6}{5}\right)^{30} + 65 = 27363$

د- عدد المصابين في شهر أفريل:

$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{30}$

$= V_0 + 65 + V_1 + 65 + \dots + V_{30} + 65$

$= V_0 + V_1 + \dots + V_{30} + 65$

$= V_0 + V_1 + \dots + V_{30} + 2015$

$= V_0\left(\frac{1-q^{\text{عدد حدود}}}{1-q}\right) + 2015$

$= 115\left(\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^{31}}{1-\frac{6}{5}}\right)$

$S_n = 165229$

عدد المصابين في شهر أفريل 165229 مصاب.

التمرين 2 :

2) إحداثيات النقطة المتوسطة G :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{20+30+43+63+92+135}{6} = 63,83$$

$$G(3,5 ; 63,83)$$

3) بيان :

| زنة العينة $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i = \ln(y_i)$ | $\ln(20)$ 2,99 | $\ln(30)$ 3,40 | $\ln(43)$ 3,76 | $\ln(63)$ 4,14 | $\ln(92)$ 4,52 | $\ln(13$ 4,90 |

$$a = \frac{\frac{1}{n}\times\sum(x_i \times y_i) - \bar{x}\times\bar{y}}{\frac{1}{n}\times\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\frac{1}{6}\times(83,63) - 13,82}{\frac{1}{6}(17,89)}$$

$$a = 0,38$$

$$\bar{z} = \frac{2,99+3,40+3,76+4,14+4,52+4,90}{6} = 3,9$$

إيجاد b :

$$z = 0,38x + b$$

$$\bar{z} = 0,38\bar{x} + b$$

$$3,95 = 0,38(3,5) + b$$

$$3,95 = 1,33 + b$$

$$b = 2,62$$

$$z = 0,38x + 2,62$$

4) إثبات :

$$z = \ln y \quad e^{0,38x+2,62}$$

$$y = e^{0,38x+2,62}$$

$$y = e^{0,38x} \times e^{2,62}$$

$$y = 14 \times e^{0,38x} \Rightarrow K = 14$$

5) السنة التي يبلغ فيها عدد المشتركين مليون مشترك :

$$14 \times e^{0,38x} = 1000$$

$$e^{0,38x} = 71,42$$

$$\ln e^{0,38x} = \ln(71,42)$$

$$0,38x = \ln(71,42)$$

$$\boxed{x = 11}$$

$$2001 + 11 - 1 \boxed{= 2011}$$

التمرين 3 :

$U_0 = 6$

$U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 3$

1 - حساب الحدود :

$$U_1 = \frac{1}{4}U_0 + 3 = \frac{1}{4}\times 6 + 3 = \frac{9}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{4}U_1 + 3 = \frac{1}{4}\times\frac{9}{2} + 3 = \frac{33}{8}$$

$$U_3 = \frac{1}{4}U_2 + 3 = \frac{1}{4}\times\frac{33}{8} + 3 = \frac{129}{32}$$

2- برهان بالتراجع أن : $U_n > 4$

- التأكد من صحة $(P_0)$ :

$U_0 > 4$

$6 > 4 \Rightarrow$ محققة

- نفرض صحة $(P_n)$ :

$U_n > 4$

- نبين صحة $(P_{n+1})$ :

$U_{n+1} > 4$

لدينا :

$U_n > 4$

$\frac{1}{4}U_n + 3 > 4$

$U_{n+1} > 4$

$\Rightarrow$ ومنه : $U_{n+1} > 4$ محققة من أجل كل عدد طبيعي

3 - إتجاه تغير المتتالية :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n + 3 - U_n = -\frac{3}{4}U_n + 3$$

لدينا : $U_n > 4$

$-\frac{3}{4}U_n < -3 \Rightarrow -\frac{3}{4}U_n + 3 > 0$

$\Rightarrow$ ومنه : المتتالية $(U_n)$ متناقصة تماما

بما أن : $(U_n)$ متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل

إذن : هي متقاربة

4) نضع : $V_n = \ln(U_n - 4)$

أ- بيان أن $(V_n)$ حسابية :

$V_{n+1} - V_n = r$

$= \ln(U_{n+1} - 4) - \ln(U_n - 4)$

$V_{n+1} - V_n = -\ln 4$

$V_0 = \ln(U_0 - 4) = \ln(6-4) = \ln 2$

ب - عبارة $V_n$ بدلالة n :

$V_n = V_p + (n-p)r$

$V_n =$ [illegible]

التمرين الرابع :

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$$

دراسة إتجاه التغير :

$g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ .

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1}$$

لدينا : $g(x) > 0$

إذا هي متزايدة تماما على المجال $]-1,+\infty[$

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ |

$g(x)$ متزايدة تماما على المجال $]-1,+\infty[$

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

$$g(0) = 0$$

جدول الإشارة :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

الجزء II :

$$F(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$$

النهايات

$$\lim_{x\to-1} F(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \text{ح.ع.ت}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{\to 0} - x = -\infty$$

- الإشتقاق

$f$ قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$

$$F'(x) = \frac{\ln(x+1) - x^2 - x}{x+1}$$

$$F'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+1} - 2x - 1\right)(x+1) - 1\left(\ln(x+1) - x^2 - x\right)}{(x+1)^2}$$

$$F'(x) = \frac{1 - 2x^2 - x - 2x - 1 - \ln(x+1) + x^2 + x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

إتجاه التغير :

بما أن $(x+1)^2 > 0$

إذا إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$f$ : $]-1,0]$ متزايدة تماما

$f$ : $[0,+\infty[$ متناقصة تماما

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

ومنه $y = x$ مقارب مائل لـ $c$ بجوار $+\infty$

الوضعية :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - y$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضعية | | $f$ تحت $(\Delta)$ | | $f$ فوق $(\Delta)$ | |

## تصحيح الموضوع الثاني :

### التمرين ① :

1) مجموعة تعريف $f(x)=\ln(2-3x)$ هي $]-\infty,\frac{2}{3}[$

2) قيمة العدد $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\ln 3+\frac{1}{2}\ln 2$ هي $\ln 3$ .

3) مشتقة الدالة $g(x)=x-x^2\ln x$ هي

$$g'(x)=1-2x\times\ln x+\frac{1}{x}\times(-x)^2$$

$$=1-2x\ln x-x$$

4) أساس المتتالية $U_n=e^{-3n+4}$ هو $q=e^{-3}$

5) قيمة $a$ هي $e$ .

### التمرين ② :

$$\begin{cases} U_0=\alpha \\ U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n-1 \end{cases}$$

قيمة $\alpha$ حتى تكون $(U_n)$ ثابتة

$\alpha=\frac{2}{3}\alpha-1$ ، $\alpha+1=\frac{2}{3}\alpha$

$3\alpha+3-2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-3$

حساب الحدود :

$U_1=\frac{2}{3}U_0-1=1$

$U_2=\frac{2}{3}U_1-1=-\frac{1}{3}$

$U_3=\frac{2}{3}U_2-1=-\frac{11}{9}$

البرهان بالتراجع : $U_n>-3$

التحقق من صحة $P(0)$ : $U_0>-3$ ، $3>-3$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ : $U_n>-3$ .

نبين صحة $P(n+1)$ : $U_{n+1}>-3$

لدينا $U_n>-3$ ، $\frac{2}{3}U_n>-2$ ، $\frac{2}{3}U_n-1>-3$

ومنه $P(n)$ محققة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ .

اتجاه التغير :

$U_{n+1}-U_n=\frac{2}{3}U_n-1-U_n=-\frac{1}{3}U_n-1$

لدينا $U_n>-3$ ، $-\frac{1}{3}U_n<1$ ، $-\frac{1}{3}U_n-1<0$

ومنه $(U_n)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

نستنتج أن $(U_n)$ متقاربة :

$V_{n+1}=U_{n+1}-U_n$

لدينا $V_n=U_n-U_{n-1}$

أي : $\frac{2}{3}V_n=\frac{2}{3}(U_n-U_{n-1})$

$\frac{2}{3}V_n=\frac{2}{3}\left(U_n-(U_n+1)\times\frac{3}{2}\right)$

$\frac{2}{3}V_n=\frac{2}{3}\left(U_n-\frac{3}{2}U_n-\frac{3}{2}\right)$

$\frac{2}{3}V_n=\frac{2}{3}U_n-U_n-1$

$\frac{2}{3}V_n=-\frac{1}{3}U_n-1$

$\frac{2}{3}V_n=V_{n+1}$

ومنه $(V_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$

$V_1=U_1-U_0=1-3=-2$

$V_n=V_p\cdot q^{n-p}=-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to+\infty}V_n=0$

$S_n=V_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=-2\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-2/3}\right)$

$=-6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$\lim_{n\to+\infty}S_n=-6$

$P_n=e^{S_n}$

### التمرين ③ :

$G(\bar{X},\bar{Y})$

$\bar{X}=3,5$ $\bar{Y}=6,34$

معادلة مستقيم الانحدار :

$y=ax+b$

$a=\dfrac{\frac{1}{n}\left(\sum x_iy_i-(\bar{x}\cdot\bar{y})\right)}{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2}=0,4$

$b=4,94$

$y=0,4x+4,94$

~~x=35~~ $x=9 \longleftarrow$ سنة 2035

$y = 0,40(9)+4,94 = 8,54$

السنة التي يتجاوز كمية الاستهلاك 10 أطنان:

$0,40x + 4,94 > 10$

$0,40x > 5,06$

$x > 12,65$

$x = 13$

سنة 2055

## التمرين الرابع

$\lim_{x\to -\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

g قابلة للاشتقاق على IR:
$g'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$

| $x$ | | 1 | |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |

g متزايدة تماما على $]-\infty, 1]$ ومتناقصة تماما على $[1, +\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $e-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

2- لدينا g مستمرة ورتيبة على $]1,8 ; 1,9[$

$g(1,8) \simeq 0,20 \qquad g(1,9) \simeq -0,33$

أي $g(1,8)\times g(1,9) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حل على $]1,8;1,9[$.

لدينا g مستمرة ورتيبة على $]-1,2 ; -1,1[$

$g(-1,2) \simeq -0,03$ و $g(-1,1) \simeq 0,03$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل في $]-1,2;-1,1[$

| $x$ | | $\beta$ | | $\alpha$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

التفسير: (C) يقبل م م أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=0$

$y=1$ // $+\infty$ // // // // // //

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - x) - (e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$

$= \dfrac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + e^x + e^x - 1}{(e^x-x)^2}$

$= \dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$

| $x$ | | $\beta$ | | $\alpha$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

f متزايدة تماما على $[\beta, \alpha]$ ومتناقصة تماما على $]-\infty, \beta]$ و $[\alpha, +\infty[$:

| $x$ | $-\infty$ | | $\beta$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | $\searrow$ | $f(\beta)$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | 1 |

3) $f(\alpha) = \dfrac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha}$

ولدينا $e^\alpha = \dfrac{1}{2-\alpha}$

$f(\alpha) = \dfrac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \dfrac{-1+\alpha}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

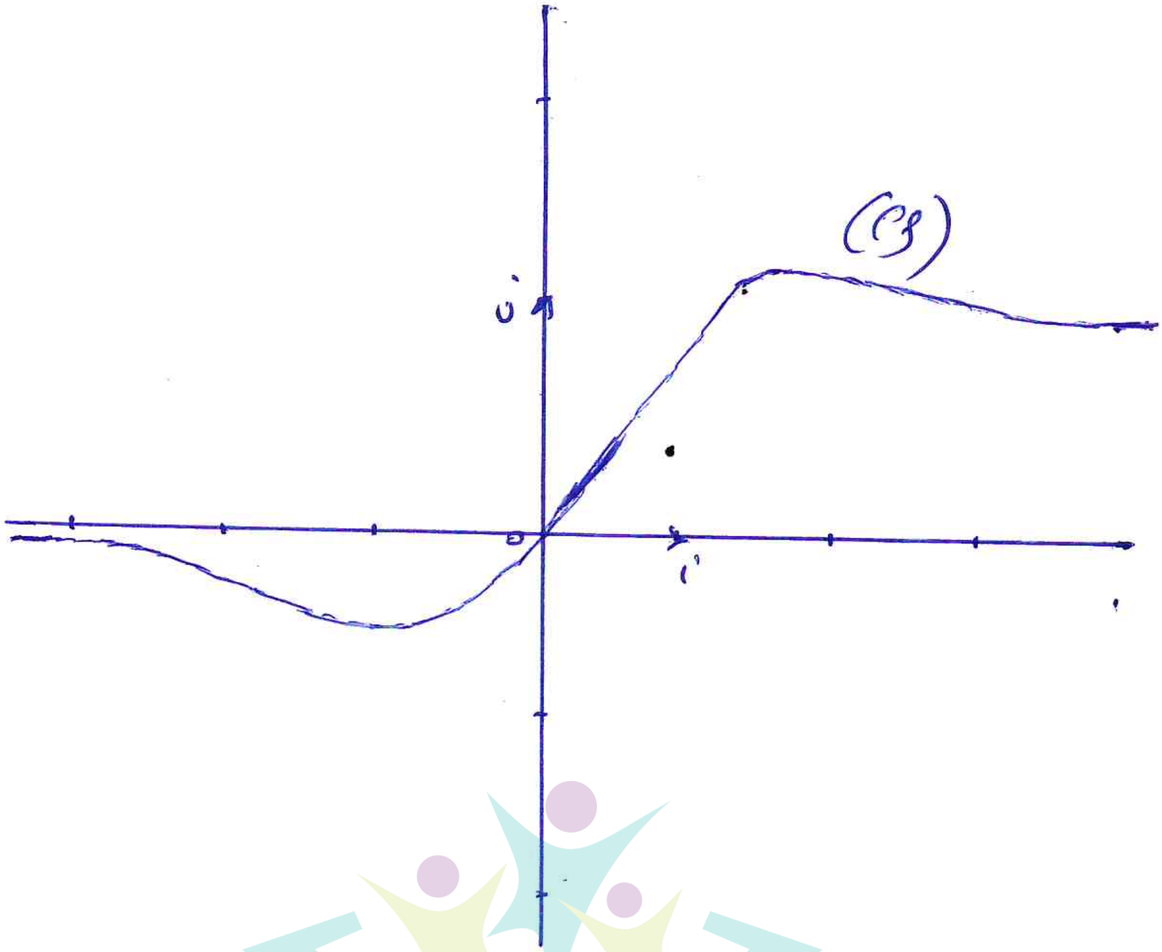
$f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - x$

$= \dfrac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} = \dfrac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

لدينا $e^x - x - 1 > 0$ و $e^x - x > 1$

إذن الإشارة من إشارة $1-x$

| $x$ | | 1 | |
|---|---|---|---|
| $f(x)-x$ | $+$ | 0 | $-$ |
| الوضعية | (C) فوق (Δ) | يتقاطعان | (C) تحت (Δ) |




المساحة:

$$A = \int_0^1 f(x) - x \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \, dx = \left[ \ln(e^x - x) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \left( \ln(e-1) - \frac{1}{2} \right) u.a$$