المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)
الشعبة: علوم تجريبية

دورة: ماي 2023
إعداد: عبد المطلب

مدرسة "الرّجاء والتفوّق" الخاصّة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوي التي لاحقاتها: $z_A = 2-2i$ ، $z_B = 1+3i$ و $z_C = -3-3i$.

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

		الاقتراح أ)	الاقتراح ب)	الاقتراح جـ)
1	الشكل الأسي للعدد $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)^{2023}$:	$e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$	$e^{i\pi}$	$e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$
2	معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC:	$(x+1)^2+y^2=13$	$x^2+y^2=13$	$(x-1)^2+y^2=13$
3	لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته 2:	$z_D = 7-i$	$z_D = 4-4i$	$z_D = 3+3i$
4	قيم الأعداد الصحيحة n حتى يكون $\left(z_A - \overline{z_B} - z_C\right)^{2n}$ عددا حقيقيا موجبا:	$n=2k$ $(k\in\mathbb{Z})$	$n=4k$ $(k\in\mathbb{Z})$	$n=2k+1$ $(k\in\mathbb{Z})$
5	المجموعة (E) للنقط M لاحقتها z حيث $\lvert \overline{z}+3-3i\rvert = \lvert iz+3-i\rvert$:	القطعة المستقيمة [BC]	الدائرة التي قطرها [BC]	المستقيم محور القطعة [BC]

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 16 كرية متماثلة لا نفرّق بينها باللّمس، منها 7 بيضاء، 6 سوداء و3 خضراء. نسحب من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد بطريقة عشوائية.

1- احسب $P(\text{A})$ احتمال الحادثة A: سحب ثلاث كريات من نفس اللّون.

2- احسب $P(\text{B})$ احتمال الحادثة B: سحب ثلاث كريات مختلفة الألوان مثنى مثنى.

3- احسب بطريقتين مختلفتين $P(\text{C})$ احتمال الحادثة C: سحب ثلاث كريات من لونين مختلفين.

4- نعتبر اللّعبة التالية: عند سحب ثلاث كريات بيضاء يربح اللّاعب 5نقاط، عند سحب ثلاث كريات سوداء أو ثلاث كريات خضراء يخسر اللّاعب 5 نقاط، عند سحب ثلاث كريات مختلفة الألوان مثنى مثنى لا يربح اللّاعب شيئا، وفي الحالات المتبقية يربح اللّاعب نقطتين. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب ربح أو خسارة اللّاعب. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ و $P(X^2=25)$.

5- نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بحيث لا نعيد الكرية المسحوبة في كل مرة.

أ) بيّن أنّ احتمال الحادثة D: سحب كرية واحدة فقط بيضاء أو كرية واحدة فقط خضراء هو $\frac{9}{14}$.

ب) لتكن الحادثة E: الكرية الأولى المسحوبة سوداء. احسب الاحتمال الشرطي $P_D(\text{E})$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرّفة بـ: $u_0=-\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=(u_n+1)e^{u_n}-1$.

1- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1\le u_n\le -\frac{1}{2}$.

2- من أجل كل عدد حقيقي x ، ادرس إشارة $(x+1)(e^x-1)$. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

3- بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

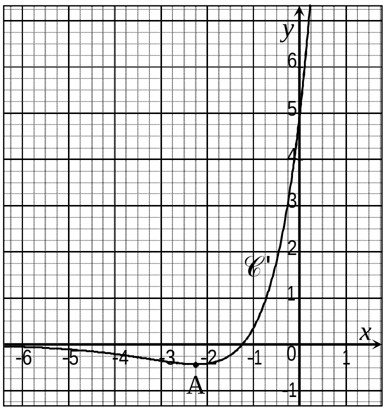
4- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $1+u_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{e}}(1+u_n)$ ، وأنّ $1+u_n\le\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{2}$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5- من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$، نضع: $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$. بيّن أنّ: $S_n=\ln(2u_n+2)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g الدالة المعرّفة والقابلة للاشتقاق على $]-\infty\,;1]$ بـ: $g(x)=(ax+b)e^x-1$ (a و b عددان حقيقيان)

في الشكل المقابل، $(\mathscr{C}')$ هو التمثيل البياني للدالة g' مشتقة الدالة g.



1- إذا علمت أنّ $(\mathscr{C}')$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{5}{4}$، ويقطع حامل محور التراتيب في النقطة ذات الترتيبة 5 ، وأنّه يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة $-\frac{9}{4}$.

أ) بقراءة بيانية ادرس اتّجاه تغيّر الدالة g. ماذا تمثل النقطة A؟

ب) عيّن العددين a و b . (في باقي التمرين نضع: $a=4$ و $b=1$).

2- أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات g على $]-\infty\,;1]$.

ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty\,;1]$.

II - نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty\,;1]$ بـ: $f(x)=x-(4x-3)e^x$

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) مع تحديد نقطة تقاطعهما.

2- أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها. (لاحظ أنّ $f'(x)=-g(x)$)

ب) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $-2<\alpha<-\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{4}<\beta<1$.

3- أ) اكتب معادلة لـ(Δ') مماس $(\mathscr{C})$ الذي يوازي (Δ)، ثم ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ')، والمنحني $(\mathscr{C})$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة $(4x-3)e^x=m$.

4- لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty\,;1]$ بـ: $h(x)=(4x-3)e^x$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-\infty\,;1]$ فإنّ: $h(x)=2h'(x)-h''(x)$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة h على المجال $]-\infty\,;1]$ والتي تنعدم عند الصفر.

ج) احسب مساحة الحيّز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$، (Δ)، محور التراتيب، والمستقيم الذي معادلته $x=-1$.

5- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge1$، $h^{(n)}(x)=(4x+4n-3)e^x$. ($h^{(n)}$ المشتق النوني لـ h)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1- عيّن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث: $\begin{cases} z_1 + i z_2 = 0 \\ \overline{z_1} + i\,\overline{z_2} = 6 - 10i \end{cases}$.

2- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B ، C و D نقط من هذا المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3+5i$ ، $z_B = -5+3i$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ) تأكّد أنّ $z_B + z_D = z_A + z_C$ وأنّ $z_B - z_D = i(z_A - z_C)$. استنتج طبيعة الرباعي ABCD ثم مثّله.

ب) عيّن مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathscr{C})$ المحيطة بالرباعي ABCD، ثم أنشئها.

3- لتكن النقطة M من المستوي لاحقتها z تختلف عن A وC، ولتكن النقطة M' لاحقتها Z : $Z = \dfrac{z^2 - z_A^{\,2}}{(z - z_C)^2}$.

أ) بيّن أنّ $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_C}$ ، ثم عيّن وأنشئ المجموعة Γ_1 للنقط M من المستوي حيث $\arg Z = \pi$.

ب) بيّن أنّ المجموعة Γ_2 للنقط M حيث M' تنتمي إلى حامل محور التراتيب هي $(\mathscr{C})$ باستثناء A وC.

4- E نقطة من هذا المستوي لاحقتها z_E حيث: $\dfrac{z_E}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{12}i}$.

أ) اكتب على الشكل الأسي ثم على الشكل الجبري العدد المركب z_E .

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_E}{1+i\sqrt{3}}$. استنتج قيمتي $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس. كرية واحدة تحمل الرقم 1، كريتان تحملان الرقم 2، ثلاث كريات تحمل الرقم 3 وأربع كريات تحمل الرقم 4. نسحب منه عشوائيا وفي آن واحد كريتين.

نسمي الحادثة A: "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما يساوي 4 أو 6"، الحادثة B: "سحب كريتين تحملان رقمين جداءهما زوجي"، والحادثة C: "سحب كريتين إحداهما فقط تحمل الرقم 1".

1- أ) احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(A \cap B)$ و $P(A \cap C)$.

ب) ادرس استقلالية الحادثتين A و B ، ثم الحادثتين A و C.

جـ) احسب $P_E(D)$ احتمال سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما زوجي علما أنّ الرقمين مختلفان.

2- ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب: "الرقم الأكبر عند سحب رقمين زوجيين مختلفين"، "الرقم الأكبر عند سحب رقمين فرديين مختلفين"، "الرقم الأصغر عند سحب رقمين أحدهما زوجي والآخر فردي"، "ونفس الرقم عند سحب رقمين متساويين". عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر X، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3- نضيف إلى الكيس السابق $(n-9)$ كرية تحمل الرقم 2، حيث n عدد طبيعي أكبر من 9، ثم نسحب منه عشوائيا كريتين على التوالي بدون إرجاع. ما هو عدد الكريات التي تمّ إضافتها إلى الكيس علما أنّ احتمال الحصول على كرية واحدة فقط تحمل رقما زوجيا هو 0,4. استعمل شجرة الاحتمالات أو العدّ.

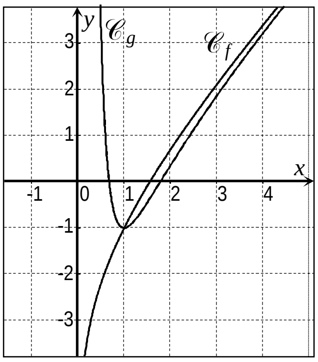
التمرين الثالث: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

		الاقتراح أ)	الاقتراح ب)	الاقتراح جـ)
1	a، b و c حدود متتابعة موجبة تماما للمتتالية الهندسية التي تحقّق: $\ln a^2+\ln c^2=16$:	$b=e^4$	$b=4$	$b=e^2$
2	المتتالية العددية (w_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة: $w_n=\dfrac{e^n}{e^n+1}$، هي متتالية:	متزايدة تماما ومتقاربة	متناقصة تماما ومتقاربة	متزايدة تماما ومتباعدة
3	المتتالية العددية المتقاربة والمعرّفة بـ: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $u_{n+1}=2u_n-\ln(2e^{u_n}-1)$. نهاية (u_n) هي:	$+\infty$	1	0
4	المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_0=0$ و $v_{n+1}=v_n+2n+1$. عبارة حدّها العام هي:	$v_n=2n^2-n$	$v_n=n^2$	$v_n=(n+1)^2$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

في الشكل المقابل $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0\,;+\infty[$.



I - بقراءة بيانية، خمّن: **1-** $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2- وضعية المنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}_g)$.

II- الدالتان العدديتان f و g المعرفتان على المجال $]0\,;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=x-2+\ln x \quad \text{و} \quad g(x)=\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)\ln x+x-2 .$$

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}_g)$ ثم بيّن أنّهما متقاربان.

2- أ) احسب $f'(x)$، ثم بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

ب) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}5<\alpha<1{,}6$.

ج) اكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحني $(\mathscr{C}_f)$ الذي يشمل النقطة A حيث $\mathrm{A}(0\,;-3)$.

3- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$، نعتبر النقطة M من $(\mathscr{C}_f)$ فاصلتها x والنقطة N من $(\mathscr{C}_g)$ فاصلتها x، ولتكن h الدالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $h(x)=f(x)-g(x)$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل $x>0$ فإنّ: $h'(x)=\dfrac{2(1-2\ln x)}{x^3}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة h، وجدول تغيراتها.

ب) تأكّد أنّه على $]1\,;+\infty[$، $\mathrm{MN}=h(x)$. استنتج قيمة x حتى تكون المسافة MN أكبر ما يمكن.

ج) بيّن أنّ $\ln\alpha=2-\alpha$، ثم استنتج أنّه من أجل $x=\alpha$، فإنّ المسافة $\mathrm{MN}=\dfrac{4-2\alpha}{\alpha^2}$.

4- λ عدد حقيقي أكبر من 1. باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أنّ $\displaystyle\int_1^\lambda\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx=\frac{\lambda-1-\ln\lambda}{\lambda}$. استنتج مساحة الحيّز المستوي $\mathcal{A}(\lambda)$ المحدّد بـ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=\lambda$، واحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

5- ارسم في معلم متعامد ومتجانس المنحني الممثل للدالة k المعرّفة على $]-\infty\,;2[$ بـ: $k(x)=g(-x+2)$.

انتهى الموضوع الثاني

وفّقكم الله أعزائي الطلاب في البكالوريا