# تصحيح اختبار الفصل 1 2023م

"عبد المطلب"

## تمرين 1:

I - 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x}+\ln x\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-1+\frac{2+x\ln x}{x}\right)=+\infty$

(ج) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$.

2) أ) $f'(x)=\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-2+x}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ : $0 \quad - \quad 2 \quad +$

$x\geq 2$ : $f$ متزايدة تماما. $0<x\leq 2$ : $f$ متناقصة تماما

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\ln 2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

ب) $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

يشمل $A(2;0)$ : $0=f'(x_0)(2-x_0)+f(x_0)$

$2-x_0=\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$ ، ومنه: $x_0=2+\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$f(x_0)=-f'(x_0)$ ، $x_0=2-1=1$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-x+2$

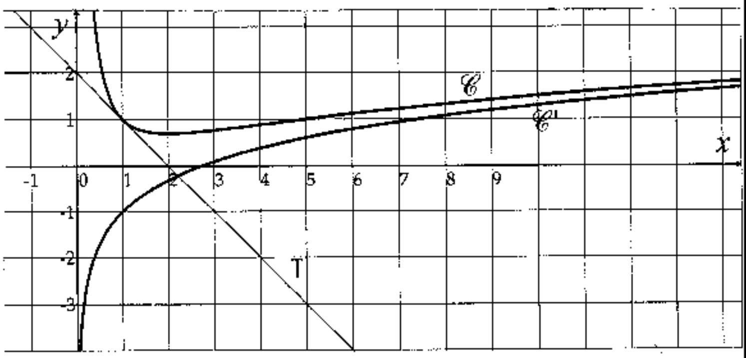
3) أ) $f(x)-(-1+\ln x)=\frac{2}{x}>0$

ومنه: (ج) أعلى (ج')

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x}\right)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x+1\right]=0$ . (ج') يقارب (ج) بجوار $+\infty$

4) أ) (ج') هو صورة $(C_{\ln})$ بانسحاب شعاعه $\vec{V}\binom{0}{-1}$




ب) حلول المعادلة $f(x)=-x+e^{f(m)}$ هي فواصل نقط تقاطع (ج) مع المستقيمات المائلة الموازية لـ (T) (معامل توجيهها يساوي -1)

لدينا معادلة المماس (T): $y=-x+2$

حلين متمايزين: $e^{f(m)}>2$ ،

$f(m)>\ln 2$ : $m\in\,]0;2[\cup]2;+\infty[$

II - 1) $f_k'(x)=\frac{-k}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-k}{x^2}$

إشارة $f_k'(x)$ : $0 \quad - \quad k \quad +$

$x\geq k$ : $f_k$ متزايدة تماما.

$0<x\leq k$ : $f_k$ متناقصة تماما.

$A_k$ تمثل نقطة حدية (صغرى)

2) $xy'+y=\ln x$

$x\cdot f_k'(x)+f_k(x)=\ln x$

$x\left(\frac{x-k}{x^2}\right)-1+\frac{k}{x}+\ln x=$

$\frac{x-k}{x}-\frac{x-k}{x}+\ln x=\ln x$

محققة، ومنه $f_k$ حل للمعادلة: $xy'+y=\ln x$

$(C_k)$ يقبل مماس يوازي (T) عند 2 يعني: $f_k'(2)=-1$ ، $\frac{2-k}{2^2}=-1$ ومنه: $k=6$

3) $f_p(x)-f_q(x)=\left(-1+\frac{p}{x}+\ln x\right)-\left(-1+\frac{q}{x}+\ln x\right)$

$f_p(x)-f_q(x)=\frac{p-q}{x}>0$

ومنه: $(C_p)$ أعلى $(C_q)$ لما $x>0$ .

4) $x=k$ و $y=\ln k$ ، ومنه: $y=\ln x$

$f_k(x)-\ln x=\frac{-x+k}{x}$

$\begin{cases} x>k : (C_k) \text{ أسفل } (C) \\ x<k : (C_k) \text{ أعلى } (C) \end{cases}$ $(C_k)$ يقطع $(C)$ عند النقطة $A_k$

5) $(C_1)$ هو منحني $f_1$ لأن $A_1(1;0)$

ومنه: $a=1$ بنفس الطريقة نجد: $b=3$ و $c=5$ . $(\Gamma)$ هو $(C)$

## سؤال إضافي:

$f_k(\alpha)=\beta$ ، $-1+\frac{k}{\alpha}+\ln\alpha=\beta$

نجد: $k=\alpha(\beta+1-\ln\alpha)$ $(\alpha>0)$

$(C_k)$ و $(C_{k'})$ لا يتقاطعان.

"عبد المطلب"

## تمرين 2 : "عبد المطلب"

I - 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-7)e^{-x}+1 = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x} - 7e^{-x}+1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x} - \frac{7}{e^x}+1\right) = 1$

2) $g'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x-7) = (-x+8)e^{-x}$

إشارة $g'(x)$ : $+ \quad 8 \quad -$

$x \geq 8$ : $g$ متناقصة تماما ، $x \leq 8$ : $g$ متزايدة تماما

| $x$ | $-\infty$ | $8$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $1+e^{-8}$ | $\searrow 1$ |

3) $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,6 ; 1,7[$ ، $g(1,6) \simeq -0,09 < 0$ ، $g(1,7) = 0,03 > 0$ . حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ .

إشارة $g(x)$ : $- \quad \alpha \quad +$

II - 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x - 4e^x+4}{e^x+1} = 4$

(C) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا $(y=4)$ بجوار $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{e^x(x-4+4e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = +\infty$

2) أ) $f'(x) = \frac{[(x+1)e^x - 4e^x](e^x+1) - e^x(xe^x-4e^x+4)}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{xe^x - 7e^x + e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}(xe^{-x} - 7e^{-x}+1)}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{e^{2x}\cdot g(x)}{(e^x+1)^2}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ .

$x \geq \alpha$ : $f$ متزايدة تماما ، $x \leq \alpha$ : $f$ متناقصة تماما

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $4 \searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow +\infty$ |

3) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-4)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x+8}{e^x+1} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(-1+\frac{8}{x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = 0$ ، $\lim\limits_{+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim\limits_{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = 0$

$(\Delta): y = x-4$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

ب) لدراسة الوضعية، ندرس إشارة $f(x)-y$

$f(x)-y = \frac{-x+8}{e^x+1}$ ، $+ \quad 8 \quad -$

$x > 8$ : (C) أسفل $(\Delta)$ .

$x < 8$ : (C) أعلى $(\Delta)$ .

(C) يقطع $(\Delta)$ عند $A(8;4)$

4) أ) لدينا $g(\alpha)=0$ : $(\alpha-7)e^{-\alpha}+1 = 0$

أي $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha-7}$ ، نعوضها $(e^{\alpha} = 7-\alpha)$ في $f(\alpha)$

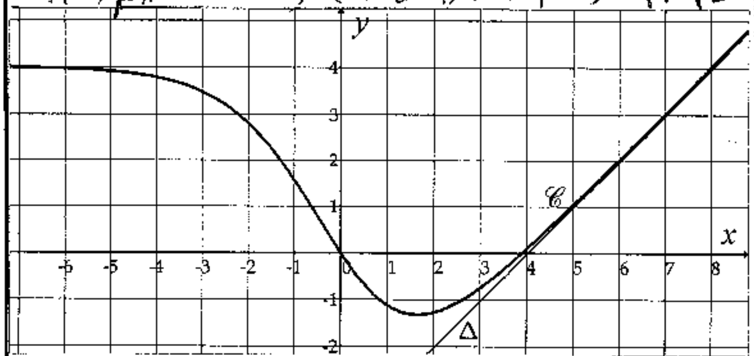
$f(\alpha) = \frac{\alpha e^{\alpha} - 4e^{\alpha}+4}{e^{\alpha}+1} = \frac{\alpha(7-\alpha)-4(7-\alpha)+4}{7-\alpha+1}$

$f(\alpha) = \frac{-\alpha^2+11\alpha-24}{8-\alpha} = \frac{(8-\alpha)(\alpha-3)}{8-\alpha} = \alpha-3$

$1,6 < \alpha < 1,7$ ، $-1,4 < f(\alpha) < -1,3$

ب) $f(0)=0$ . $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]3,9;4[$ ، $f(4)=0,07>0$ ، $f(3,9) \simeq -0,02<0$ .
حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ حيث $3,9<\beta<4$ على $]\alpha;+\infty[$ .

5) أ) رسم البيان (C) والمستقيم $(\Delta)$ .




ب) $x + (7-m)e^{-x} - 1 - m = 0$

$x + 7e^{-x} - 1 = m(e^{-x}+1)$

$m = \frac{e^x(x+7e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{xe^x+7-e^x}{e^x+1}$

$m-3 = \frac{xe^x+7-e^x}{e^x+1} - 3 = \frac{xe^x-4e^x+4}{e^x+1}$

$(f(x)=m-3)$ . حلين موجبين تماما

$\alpha-3 < m-3 < 0$ ومنه : $(\alpha < m < 3)$

III 1) $h(x)=0$ يعني $x - \ln\left(\frac{4}{4-x}\right) = 0$

$x = \ln\left(\frac{4}{4-x}\right)$ يكافئ $e^x = \frac{4}{4-x}$ ،

$-xe^x + 4e^x = 4$ ، $xe^x - 4e^x + 4 = 0$ : $(f(x)=0)$

ومنه $h(x)=0$ تقبل حلين $0$ و $\beta$ .

2) $x<3$ : $h'(x)>0$ ، ومنه $h$ متزايدة تماما

$3<x<4$ : $h'(x)<0$ ، ومنه $h$ متناقصة تماما

إذن المنحنى $(C_1)$ يمثل الدالة $h$ .

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} h'(x) = 1$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} h'(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3} = h'(3) = 0$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)}{x} = h'(0) = \frac{3}{4}$ ، بوضع $K(x) = xh(x+4)$

$\lim\limits_{x\to-4}\frac{xh(x+4)}{x+4} = \lim\limits_{x\to-4}\frac{K(x)}{x+4} = K'(-4) = -3$

لأن : $K'(x) = h(x+4) + xh'(x+4)$ .

أو نضع $t=x+4$ : $\lim\limits_{x\to-4}\frac{xh(x+4)}{x+4} = \lim\limits_{t\to0}(t-4)\frac{h(t)}{t} = -3$

4) $y = h'(0)(x-0) + h(0) = \frac{3}{4}x$

5) $(C_1)$ لا يقبل نقطة انعطاف لأن $h'$ متناقصة تماما $(h''(x)<0)$

6) $[(h')^2]' = 2\cdot h'\cdot h''$ ، $x<3$ متناقصة ، $3<x<4$ متزايدة