تصحيح اختبار الفصل 2 2024م

"عبد المطلب"

تمرين 1 :

1) أ) $W_{n+1} = \frac{U_{n+1} - V_{n+1}}{2}$

$$W_{n+1} = \frac{\frac{4U_n + V_n}{5} - \frac{2U_n + 3V_n}{5}}{2} = \frac{2U_n - 2V_n}{10}$$

$$W_{n+1} = \frac{U_n - V_n}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{U_n - V_n}{2}\right) = \frac{2}{5} W_n$$

$$W_0 = \frac{U_0 - V_0}{2} = \frac{3}{10} \qquad q = \frac{2}{5}$$

ب) $W_n = W_0 \cdot q^n = \frac{3}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ (الحد العام)

$\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$ لأن $-1 < q < 1$.

2) أ) $V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n + 3V_n}{5} - V_n = \frac{2(U_n - V_n)}{5} = \frac{4}{5} W_n > 0$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n + V_n}{5} - U_n = \frac{V_n - U_n}{5} = -\frac{2}{5} W_n < 0$$

ومنه: (V_n) متزايدة و (U_n) متناقصة

ب) (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$ ، إذن (U_n) و (V_n) متجاورتان

3) $t_{n+1} = 2U_{n+1} + V_{n+1} = \frac{8U_n + 2V_n}{5} + \frac{2U_n + 3V_n}{5}$

$t_{n+1} = \frac{10U_n + 5V_n}{5} = 2U_n + V_n = t_n$ ومنه (t_n) ثابتة

$t_n = t_0 = 2U_0 + V_0$ ومنه: $t_n = \frac{3}{2}$

$$2\lim_{n\to+\infty} U_n + \lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} t_n$$

$3\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{2}$ ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}$

4) $S_n - S'_n = \sum\limits_{n=0}^{n} (U_n - V_n) = 2\sum\limits_{n=0}^{n} W_n$

$$S_n - S'_n = 2 \times \frac{3}{10}\left(\frac{1 - (\frac{2}{5})^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}}\right) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$2S_n + S'_n = \sum_{n=0}^{n} (2U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{n} t_n$$

$$2S_n + S'_n = \underbrace{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{3}{2}}_{\text{مرة } (n+1)} = \frac{3}{2}(n+1)$$

$$\begin{cases} S_n - S'_n = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\ 2S_n + S'_n = \frac{3}{2}(n+1) \end{cases}$$

بالجمع: $3S_n = \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} + 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

$$S_n = \frac{n}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$S'_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

تمرين 2 :

1) $P(A) = \frac{C_n^2 + C_4^2}{C_{n+5}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 6}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \frac{n^2 - n + 12}{n^2 + 9n + 20}$

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2(5n+4)}{n^2 + 9n + 20}$$

$$P(C) = \frac{C_n^1 \times C_5^1 + C_n^2}{C_{n+5}^2} = \frac{n^2 + 9n}{n^2 + 9n + 20}$$

أو $P(C) = 1 - \frac{C_5^2}{C_{n+5}^2}$

(1 حمراء) $P(B \cap C) = \frac{C_n^1 \times C_5^1}{C_{n+5}^2} = \frac{10n}{n^2 + 9n + 20}$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{n^2 + 9n + 8}{n^2 + 9n + 20}$$

$= P(B) + P(RR)$

2) $X = \{0 ; 1 ; 2\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_{n+1}^2}{C_{n+5}^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 + 9n + 20}$$

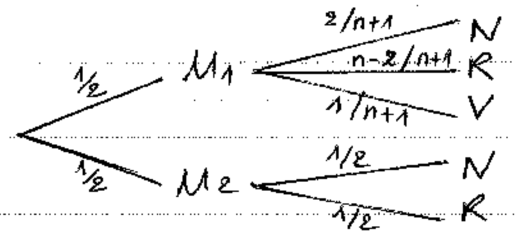
$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_{n+1}^1}{C_{n+5}^2} = \frac{8(n+1)}{n^2 + 9n + 20}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2}{C_{n+5}^2} = \frac{12}{n^2 + 9n + 20}$$

$$E(X) = 0 + \frac{8(n+1)}{n^2 + 9n + 20} + \frac{24}{n^2 + 9n + 20} = \frac{8(n+4)}{(n+4)(n+5)} = \frac{8}{n+5}$$

3) $P = \frac{A_n^1 \times A_{n+4}^1}{A_{n+5}^2} = \frac{n}{n+5}$

4) أ)



ب) $P(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3n - 3}{4(n+1)}$

$$P_R(U_2) = \frac{P(U_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3n-3}{4(n+1)}} = \frac{n+1}{3n-3} = \frac{2}{5}$$

ومنه $n = 11$

تمرين 3 :

1) الاقتراح جـ هو الصحيح:

$$f'(x) = 2 + (1 - x^2)e^{-x}$$

$+ \; 1 \; +$ $\qquad f''(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

f'' تنعدم ولا تتغير إشارتها.

2) الاقتراح الصحيح هو ب) : $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$f\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-x\right)+f(x)=2\left(\frac{1}{2}\right)$ $(1-x\neq 1 ; x\neq 0)$ $(1-x\neq 0 ; x\neq 1)$

$f(1-x)+f(x)=1$

$1-x+\ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|+x+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=1+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|=1$

3) الاقتراح الصحيح هو ب) : $\frac{8}{3\ln 3}$

$\mu=\frac{1}{1-0}\int_0^1 h(x)\,dx=\int_0^1\left(e^{-x\ln 3}+e^{x\ln 3}\right)dx$

$\mu=\left[\frac{-1}{\ln 3}e^{-x\ln 3}+\frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}\right]_0^1=\frac{1}{\ln 3}\left[3^x-3^{-x}\right]_0^1=\frac{8}{3\ln 3}$

4) $5.10^{-x}+10^x-6\leq 0$ يعني $\frac{5}{10^x}+10^x-6\leq 0$

$10^{2x}-6.10^x+5\leq 0$. بوضع $X=10^x$:

$X^2-6X+5\leq 0$ $\quad + \;1\; - \;5\; +$

$1\leq X\leq 5$ ؛ $1\leq 10^x\leq 5$ ؛ $\log 1\leq x\leq \log 5$

ومنه : $0\leq x\leq \log 5$

تمرين 4:

I-1) $f'(1)=0$ ؛ $f(0)=1$

$f'(0)$ هو معامل توجيه المماس عند 0.

$f'(0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3-1}{1-0}=2$

2) $f'(x)=a+\frac{c}{x+1}$ (f قابلة للاشتقاق على I_f)

$f(0)=1$ يعني $b+c\ln 1=1$ ومنه : $b=1$

$\begin{cases}f'(1)=0\\ f'(0)=2\end{cases}$ يعني $\begin{cases}a+\frac{c}{2}=0\\ a+c=2\end{cases}$ بالطرح : $a=-2$ و $c=4$

3) (C') هو التمثيل البياني لـ: $(-f-2)$.

نناظر بالنسبة لـ (Ox) ثم نسحب بالشعاع $\vec{v}\binom{0}{-2}$

II-1) $\lim_{x\to -1}f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to -1}\ln(x+1)=-\infty$

مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-1$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{-2x+1}{x+1}+4\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=-\infty$

2) $f'(x)=-2+\frac{4}{x+1}=\frac{-2x+2}{x+1}$

إشارة $f'(x)$: $-1 \quad + \quad 1 \quad -$

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+4\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3) f مستمرة ومتناقصة تماما على $]1;+\infty[$. $f(1)>0$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، حيث $3<\alpha<4$ ؛ لأن $f(4)<0$ و $f(3)>0$.

4) $f'(x_0)=-2$ يعني : $\frac{-2x_0+2}{x_0+1}=-2$

المعادلة لا تقبل حلولا ومنه لا يوجد مماس ميله 2-.

5) $2\ln(x+1)=x+m$ ، $-x+2\ln(x+1)=m$

$-2x+4\ln(x+1)=2m$ ومنه $f(x)=2m+1$

حلين موجبين تماما : $1<2m+1<-1+4\ln 2$

ومنه : $0<m<-1+2\ln 2$

6) أ) $\begin{cases}u(x)=\ln(x+1)\\ v'(x)=1\end{cases}$ $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x+1}\\ v(x)=x\end{cases}$

$I=\int_0^2\ln(x+1)\,dx=\left[x\ln(x+1)\right]_0^2-\int_0^2\frac{x}{x+1}dx$

$=\left[x\ln(x+1)\right]_0^2-\int_0^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\left[x\ln(x+1)\right]_0^2-\left[x-\ln(x+1)\right]_0^2$

$I=\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]_0^2=3\ln 3-2$

ب) f موجبة على المجال $[0;2]$

$A=\int_0^2 f(x)\,dx=\left[-x^2+x\right]_0^2+4\int_0^2\ln(x+1)\,dx$

$A=-4+2+4(3\ln 3-2)=(12\ln 3-10)\,u.a$

III-1) أ) $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[-2+4\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=2$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[2-4\frac{\ln(-x+1)}{-x}\right]=-2$

h غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأن $h'_g(0)\neq h'_d(0)$

(C_h) يقبل نقطة زاوية $A(0,1)$. (نصفي مماسين)

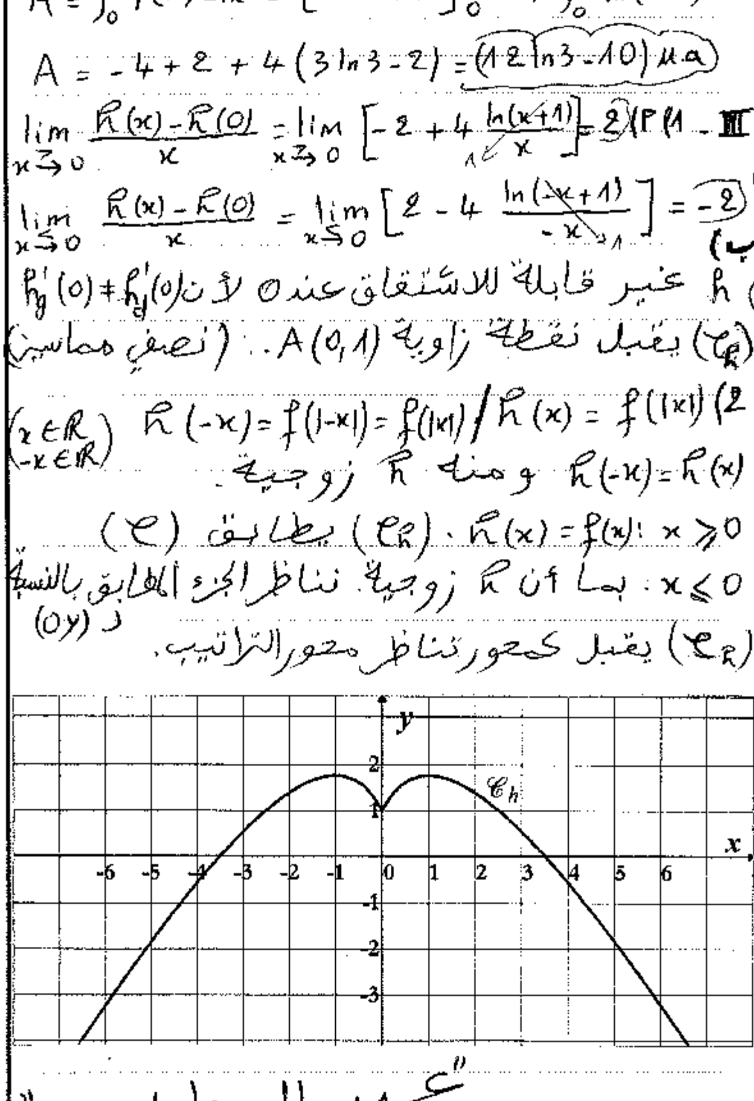
2) $h(x)=f(|x|)$ / $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)$ $(x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R})$

$h(-x)=h(x)$ ومنه h زوجية.

$x\geq 0$: $h(x)=f(x)$. (C_h) يطابق (C)

$x\leq 0$: بما أن h زوجية نناظر الجزء المطابق بالنسبة لـ (Oy)

(C_h) يقبل كمحور تناظر محور التراتيب.



"عبد المطلب"