# بكالوريا تجريبي

**اختبار في مادة: الرياضيات** **المدة: 3سا و30د**

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:**

## الموضوع الأول

**التمرين الأول: (04 نقاط)**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ $u_1=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $u_{n+1}=\dfrac{4n}{n+1}u_n$.

**1-** احسب الحدين $u_2$ و $u_3$، ثم بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ ليست حسابية وليست هندسية.

**2-** بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $u_n>0$، استنتج أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.

**3-** $(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\dfrac{n}{4^n}u_n+3$.

**أ)** أثبت أنّ $(v_n)$ متتالية ثابتة، استنتج أنّ $v_n=4$.

**ب)** أثبت أنّ $u_n=\dfrac{4^n}{n}$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ وادرس تقاربها. (يمكن وضع $t=n\ln4$)

**4-** من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ نضع: $\mathrm{P}_n=u_1\times u_2\times...\times u_n$ و $\mathrm{S}_n=\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+...+\dfrac{1}{u_n}$.

بيّن أنّ $\mathrm{P}_n=\dfrac{2^{n(n+1)}}{n!}$، ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإنّ: $\mathrm{S}_n=\dfrac{1}{9}\left(4-\dfrac{3n+4}{4^n}\right)$.

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 وأربع كريات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 2 وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام 2 ، 3 ، 3 ، 3. (لا نفرق بينها عند اللّمس)

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية.

**1-** نسمي الحادثة A: "سحب كريتين من لونين مختلفين"، والحادثة C: "سحب كريتين تحملان نفس الرقم".

بيّن أنّ $p(\mathrm{A})=\dfrac{8}{11}$ و $p(\mathrm{C})=\dfrac{3}{11}$، ثم احسب $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$، $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{C})$ و $p_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{A})$.

**2-** نسمي $a$ و $b$ ترقيم الكريتين المسحوبتين، و$X$ المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الجمع $a+b$ عند سحب كريتين رقميهما مختلف، والجداء $a\times b$ عند سحب كريتين تحملان نفس الرقم.

**أ)** برّر أنّ مجموعة قيم $X$ هي $\{1;3;4;5;9\}$، ثم بيّن أنّ $p(X=1)=\dfrac{6}{55}$ و $p(X=4)=\dfrac{18}{55}$.

**ب)** عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر $X$، ثم احسب $p(X\le E(X))$، حيث $E(X)$ هو الأمل الرياضياتي.

**3-** نرمي زهرة نرد مكعبة ومتوازنة أوجهها مرقّمة بـ 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3. إذا ظهر الوجه الذي يحمل رقما زوجيا (P) نضيف كرية بيضاء إلى الكيس، وإذا ظهر الوجه الذي يحمل رقما فرديا (I) نضيف إلى الكيس أربع كريات من لونين مختلفين: الأسود والأخضر، بعد ذلك نسحب كرية من الكيس. نسمي (B) سحب كرية بيضاء.

**أ)** أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، باستعمال الرموز (P)، (I)، (B) و $(\overline{\mathrm{B}})$ فقط.

**ب)** بيّن أنّ $p(\mathrm{B})=\dfrac{11}{45}$، واحسب احتمال ظهور الوجه ذي الرقم الزوجي علما أنّ الكرية المسحوبة بيضاء.

**جـ)** ما هو عدد الكريات السوداء المضافة سابقا إذا علمت أنّ احتمال سحب كرية سوداء (N) هو $\dfrac{1}{3}$؟

**<u>التمرين الثالث:</u> (05 نقاط)**

**1-** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$ . اكتب الحلين على الشكل الأسي.

**2-** المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث الوحدة $1cm$.

لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما $z_A=2+2i$ و $z_B=2-2i$ ، ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

**أ)** بيّن أنّ $(z_A-z_B)^{99}+i(z_A\times z_B)^{66}=0$ .

**ب)** اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\dfrac{z_A}{z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

**3- أ)** عيّن ثم أنشئ المجموعة $(E_1)$ للنقط $M(z)$ من المستوي حيث $|z-z_A|=|\bar{z}-z_A|$ .

**ب)** عيّن ثم أنشئ المجموعة $(E_2)$ للنقط $M(z)$ من المستوي حيث $z-z_I=|z_A-z_I|e^{\theta i}$ . $\theta$ يمسح $\mathbb{R}$

**4-** $T$ تحويل نقطي من المستوي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=2iz+4-8i$ .

**أ)** عيّن طبيعة التحويل $T$ وعناصره المميزة.

**ب)** عيّن $A'$ و $B'$ صورتي النقطتين A و B بواسطة التحويل $T$.

**ج)** عيّن ثم أنشئ المجموعتين $(E_1')$ و$(E_2')$ صورتي المجموعتين $(E_1)$ و$(E_2)$ بواسطة التحويل $T$.

**<u>التمرين الرابع:</u> (07 نقاط)**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+1+e^{-x-1}$

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

**1- أ)** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، وبيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ .

**ب)** بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ معادلته $y=x+1$ . ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\Delta)$.

**2- أ)** احسب $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ واستنتج إشارة $f(x)$ .

**ب)** اكتب معادلة لـ $(\Delta')$ مماس المنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة.

**3- أ)** احسب $f(-3)$ ، ثم ارسم المستقيم المقارب $(\Delta)$، والمنحني $(\mathscr{C})$.

**ب)** ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ وجود وعدد حلول المعادلة $1-me^{x+1}=0$

**4-** $n$ عدد طبيعي غير معدوم. نعتبر $\mathscr{A}(n)$ مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C})$، المستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x=-1+\ln(n+1)$ و $x=-1+\ln n$ .

**أ)** بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$: $\mathscr{A}(n)=\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)u.a$ .

**ب)** نضع: $S_n=\mathscr{A}(1)+\mathscr{A}(2)+...+\mathscr{A}(n)$ . احسب بـ $cm^2$ المجموع $S_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ .

**5-** M نقطة من $(\mathscr{C})$ فاصلتها $a$، و N نقطة تقاطع المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند M مع المستقيم $(\Delta)$.

**أ)** بيّن أنّ معادلة المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند M هي: $y=(1-e^{-a-1})x+1+e^{-a-1}(a+1)$ .

**ب)** $M'$ و $N'$ المسقطان العموديان لـ M و N على حامل محور الفواصل. بيّن أنّ $N(a+1;a+2)$ ،

واستنتج أنّ $M'N'=1$ ، ثم اشرح كيفية رسم المماس $(\Delta')$ بطريقة بسيطة، وارسمه في المعلم السابق.

**6- أ)** بيّن أنّ الدالة $f$ والدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\ln[f(x)]$ لهما نفس اتّجاه التغيّر.

**ب)** بيّن أنّ $g(x)=-x-1+\ln[1+(x+1)e^{x+1}]$ ، واستنتج أنّ منحني $g$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

**انتهى الموضوع الأول**

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول: (05 نقاط)

**I- 1-** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2+4\sqrt{3}\,z+21\right)=0$

**2-** لتكن $z_1$ ، $z_2$ و $z_3$ حلول المعادلة السابقة، بيّن أنّ: $\left(\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3\sqrt{3}\,i}\right)^{1445}=i$ .

**II-** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوي التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}$ ، $z_B=-2\sqrt{3}-3i$ و $z_C=-2\sqrt{3}+3i$ .

**1-** بيّن أنّ لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي الأضلاع هي $z_D=\sqrt{3}+6i$ .

**2- أ)** بيّن أنّ $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، استنتج طبيعة المثلث ABC والرباعي ABCD ثم مثّلهما.

**ب)** اكتب معادلة الدائرة $(\Gamma)$ المحيطة بالمثلث ABC ثم مثّلها.

**ج)** بيّن أنّ النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران $r$ ، يطلب تعيين مركزه وزاويته.

**3- أ)** عيّن العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون النقطة D مرجحا للجملة: $\{(A,\alpha);(B,-1);(C,1)\}$.

**ب)** عيّن ومثّل $(\Gamma')$ مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$.

## التمرين الثاني: (04 نقاط)

**1-** $f$ ، $g$ و $h$ الدوال العددية المعرّفة على المجال $]1\,;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\dfrac{-3-\ln x}{x}$ ، $g(x)=(2x-3)e^x$ و $h(x)=\sqrt{4x-3}$ .

بيّن أنّ: $f'(1)=h'(1)=2$ ، وأنّ: $g'(1)=e$ .

**2-** يحتوي كيس على 8 كرات لا نفرق بينها عند اللمس. 4 كرات كل منها تحمل الحرف $f$ ، 3 كرات كل منها تحمل الحرف $g$ ، وكرة واحدة تحمل الحرف $h$. نسحب من هذا الكيس عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات. نرمز بـ $k$ جمع الدوال المكتوبة على الكرات المسحوبة، كَمِثال عند سحب 3 كرات كلها تحمل الحرف $f$ نضع $k=3f$ .

ليكن $X$ المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات العدد $k'(1)$.

**أ)** برّر أنّ مجموعة قيم $X$ هي $\{6\,;e+4\,;2e+2\,;3e\}$، ثم بيّن أنّ $p(X=6)=\dfrac{5}{28}$ .

**ب)** عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $X$، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

**3-** نسحب الآن من هذا الكيس عشوائيا على التوالي 3 كرات بحيث نعيد في كل مرة الكرة المسحوبة إلى الكيس.

احسب احتمال سحب 3 كرات مختلفة مثنى مثنى.

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 0$ ، $u_1 = \frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $9u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$.

**1-** احسب الحد $u_2$، ثم بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ ليست حسابية وليست هندسية.

**2-** $(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3u_{n+1} - u_n$.

أثبت أنّ $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$، ثم اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$.

**3-** $(w_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

**أ)** أثبت أنّ $(w_n)$ متتالية حسابية أساسها $1$، ثم اكتب عبارة $w_n$ بدلالة $n$.

**ب)** أثبت أنّ $u_n = \frac{n}{3^n}$، ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$ وادرس تقاربها. (يمكن وضع $t = n\ln 3$)

**4-** من أجل كل عدد طبيعي نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإنّ: $S_n = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{2n+3}{3^n}\right)$.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**I-** $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x(2-\ln x)^2$.

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1-** احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم بوضع $\ln x = t$، بيّن أنّ $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{t \to -\infty}\left(t^2e^t - 4te^t + 4e^t\right) = 0$.

**2-** **أ)** أثبت أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$، فإنّ $f'(x) = \ln x(-2+\ln x)$.

**ب)** ادرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

**ج)** بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف $A$، ثم اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $A$.

**3-** **أ)** احسب $f(15)$ ، ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C}_f)$ والمماس $(\Delta)$. الوحدة $1cm$

**ب)** ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ وجود وعدد حلول المعادلة $f(x) + m = 0$.

**II-** $g$ الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2x(2-\ln x)$ ، وليكن $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني.

**1-** احسب $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ ، وبيّن أنّ: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = 0$.

**2-** أثبت أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، فإنّ $g'(x) = 2 - 2\ln x$، ثم شكّل جدول تغيرات $g$.

**3-** **أ)** أثبت أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$، فإنّ $f(x) - g(x) = x\,f'(x)$.

**ب)** ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}_g)$ مع تحديد نقاط تقاطعهما.

**ج)** احسب $g(10)$ ، ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C}_g)$ في نفس المعلم السابق.

**4-** **أ)** باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_1^{e^2}\left(f(x) - g(x)\right)dx = -4 - \int_1^{e^2} f(x)\,dx$. استعن بـ **II- 3-** أ).

**ب)** باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_1^{e^2} g(x)\,dx = \frac{e^4 - 5}{2}$، استنتج أنّ: $\int_1^{e^2} f(x)\,dx = \frac{e^4 - 13}{4}$.

**ج)** استنتج مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = e^2$.

**انتهى الموضوع الثاني**