المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي ع.ت و ت.ر المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الأول**	الموسم الدراسي: 2015/2014 المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (4نقاط)

نعتبر المعادلتين التفاضليتين المعرفتين على $\mathbb{R}$: $y' - y = 0 \ldots (E)$ و $y' - y = xe^{2x} \ldots (F)$

1) لتكن g مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (E)، عيّن عبارة $g(x)$.

2) عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (ax+b)e^{2x}$ حلا للمعادلة (F).

3) لتكن f حلا للمعادلة (F) حيث $f(1) = 2e$ ، احسب $f'(1)$ ثم أوجد عبارة $f(x)$ علما أنّ $f = g + h$.

تمرين2 (9نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x - x}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ و أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. فسّر النتيجتين هندسيا.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

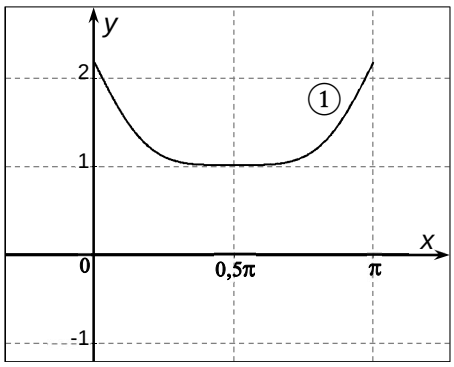
3) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$.

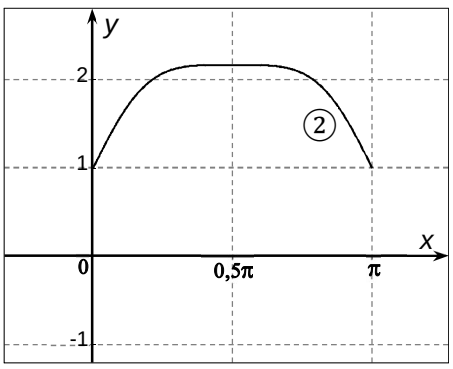
4) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

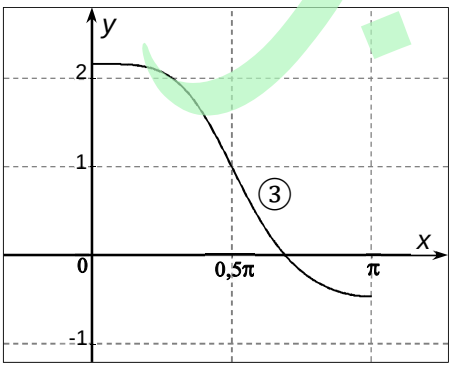
5) ارسم بدقّة المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$، ثم بقراءة بيانية عيّن قيمة $f''(0)$.

6) بيّن أنّ $e^{\alpha} = -\alpha$ وأنّ معادلة المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة α هي: $y = \dfrac{\alpha - 1}{2\alpha}(x - \alpha)$.

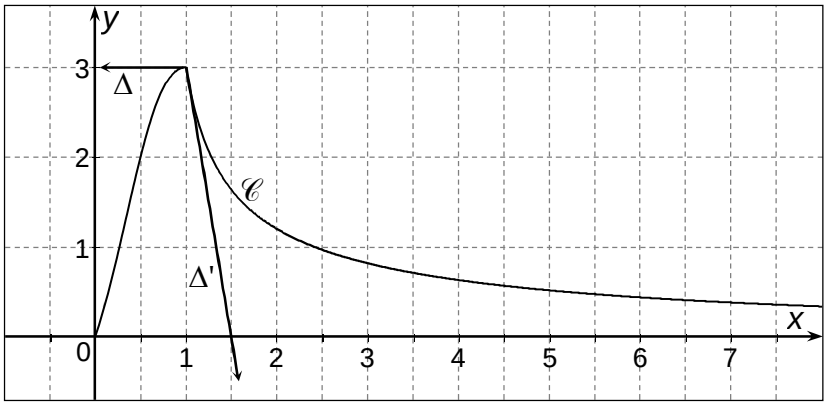
7) g الدالة المعرفة على المجال $[0; \pi]$ بـ: $g(x) = f(\cos x)$. من بين المنحنيات الثلاثة ① ، ② و ③ المبيّنة أسفله، عيّن المنحني الممثّل للدالة g . علّل اختيارك وذلك بدراسة تغيرات الدالة g على المجال $[0; \pi]$.







تمرين3 (7نقاط)



في الشكل المرفق: المنحني $\mathscr{C}$ للدالة f المعرفة على المجال $[0\,;+\infty[$، Δ و Δ' نصفي المماسين لـ $\mathscr{C}$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

1) شكّل جدول تغيرات f على $[0\,;+\infty[$.

2) استعمل Δ و Δ' لحساب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

3) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 1، ثم اكتب معادلة لكل من Δ و Δ'.

4) استعمل المنحني $\mathscr{C}$ لتعيين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=m^2-1$ حلين متمايزين.

5) أثبت صحّة تخمينك للسؤال 3) إذا علمت أنّه من أجل كل x من $[0\,;+\infty[$ فإنّ $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+|x-1|}$.

تصحيح اختبار الفصل 1 : 2014

"عبد المطلب"

تمرين 1 :

1) $g(x) = Ce^{x}$ (C عدد حقيقي) ①

2) $h'(x) - h(x) = xe^{2x}$

$h'(x) = (2ax + a + 2b)e^{2x}$

$(2ax + a + 2b)e^{2x} - (ax+b)e^{2x} = xe^{2x}$

$(ax + a + b)e^{2x} = xe^{2x}$

بالمطابقة نجد : $a = 1$ و $b = -1$

ومنه $h(x) = (x-1)e^{2x}$ (1,5)

3) $f'(1) - f(1) = e^{2}$ ومنه

$f'(1) = e^{2} + 2e$ (0,5)

$f(x) = g(x) + h(x)$

$f(x) = Ce^{x} + (x-1)e^{2x}$

وبما أن $f(1) = 2e$ أي

$Ce^{1} + 0 = 2e$ نجد $C = 2$

ومنه $f(x) = 2e^{x} + (x-1)e^{2x}$ ①

تمرين 2 :

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{e^{x}}{x} + 1\right)}{x\left(\frac{e^{x}}{x} - 1\right)} = -1$

لأن $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}}{x} = 0$ (0,5)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}\left(1 + \frac{x}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1 - \frac{x}{e^{x}}\right)} = 1$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$ (0,5)

$y = -1$ و $y = 1$ مستقيمين مقاربين لـ (C). (0,5)

2) $f'(x) = \frac{2e^{x}(1-x)}{(e^{x}-x)^{2}}$ (0,5)

$x < 1$: $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما

$x < 1$: $f'(x) > 0$ ومنه f متناقصة تماما

ولما $x = 1$: $f'(x) = 0$ (0,5)

(0,5)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\frac{e+1}{e-1} \simeq 2,2$	↘	1

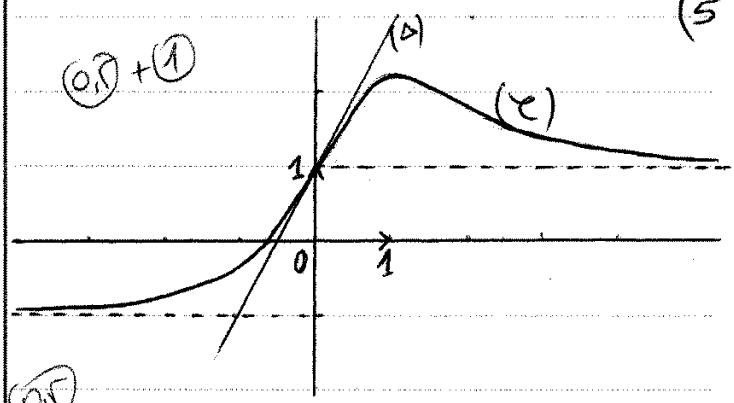
3) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-0,6 , -0,5[$ ، $f(-0,6) = -0,04 < 0$ ①

و $f(-0,5) = 0,09 > 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,6 < \alpha < -0,5$.

4) $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 2x + 1$ (0,5)

5)



(0,5) + ①

(0,5)

عند 0 يوجد نقطة انعطاف ومنه $f''(0) = 0$.

6) $f(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + \alpha}{e^{\alpha} - \alpha} = 0$ ومنه $e^{\alpha} = -\alpha$ (0,5)

$f'(\alpha) = \frac{2e^{\alpha}(1-\alpha)}{(e^{\alpha}-\alpha)^{2}} = \frac{2(-\alpha)(1-\alpha)}{(-\alpha-\alpha)^{2}}$

$f'(\alpha) = \frac{2\alpha(1+\alpha)}{4\alpha^{2}} = \frac{\alpha - 1}{2\alpha}$ (0,5)

$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{2\alpha}(x-\alpha)$

7) المنحني (3) هو المناسب، التبرير: (0,5)

$g'(x) = (\cos x)' \times f'(\cos x)$

(0,5) $g'(x) = (-\sin x) \times f'(\cos x)$

$g'(x) = -\sin x \times \dfrac{2e^{\cos x}(1-\cos x)}{(e^{\cos x} - \cos x)^2}$

لما $0 \leq x \leq \pi$: $1 - \cos x \geq 0$

و $-\sin x \leq 0$ (0,5)

ومنه $g'(x) \leq 0$ ، g' متناقصة على $[0;\pi]$.

تمرين 3:

1) (1)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

2) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'_g(1) = 0$ (1)

هو معامل توجيه (Δ).

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'_d(1) = -6$ (1)

هو معامل توجيه (Δ').

3) $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ (0,5)

ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 1

(Δ) $y_1 = 3$ (0,5)

(Δ') $y_2 = -6x + 9$ (0,5)

4) $0 < m^2 - 1 < 3$

أي $1 < m^2 < 4$ (0,5)

$m^2 > 1$ و $m^2 < 4$

$m^2 - 1 > 0$ و $m^2 - 4 < 0$

$(m-1)(m+1) > 0$ و $(m-2)(m+2) < 0$

$+ \quad -1 \quad - \quad 1 \quad +$ $\qquad$ $+ \quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$

$(]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[) \cap (]-2,2[)$

في الأخير: $m \in]-2;-1[\cup]1;2[$ (0,5)

5)

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{\frac{3x}{x^2-x+1} - 3}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{-3x^2 + 6x - 3}{(x-1)(x^2-x+1)}$

$= \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{-3(x-1)^2}{(x-1)(x^2-x+1)}$ (0,75)

$= \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{-3(x-1)}{x^2-x+1} = 0 = f'_g(1)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{\frac{3x}{x^2+x-1} - 3}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{-3x^2 + 3}{(x-1)(x^2+x-1)}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x-1)}$ (0,75)

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{-3(x+1)}{x^2+x-1} = -6 = f'_d(1)$

ومنه التخمين كان صحيحا.

"عبد المطلب"