| | | |
|---|---|---|
| **المؤسسة:** الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)<br>**المستوى:** ثالثة ثانوي ع-ت و ت-ر<br>**المادة:** رياضيات | **الفرض الأول**<br>**للفصل الأول** | **الموسم الدراسي:** 2015/2014م<br>**المدة:** ساعتان (2سا)<br>**إعداد:** عبد المطلب |

**تمرين1** (9نقاط) احسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+6}{x^2+2x-8}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+3x+5}{(2x-1)^2}$
3. $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{x^2-5x+13}{x^2-2x}$
4. $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}\dfrac{x^2-4x-9}{x^2-4x+4}$
5. $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\dfrac{x^2+x+1}{-x^2+2x+3}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2-9x}-6}{x+3}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2-x}$
9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2-2ax-a^2}{x^2-a^2}$ ($a$ عدد حقيقي)

**تمرين2** (6نقاط)

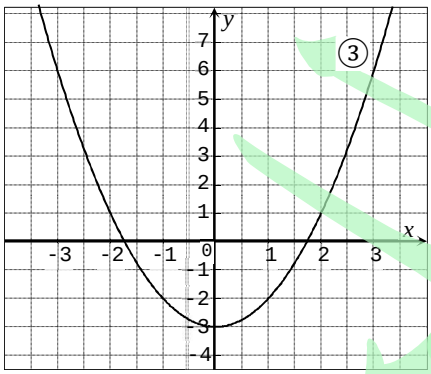
$f$ دالة معرّفة على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\dfrac{-4x^2-6x+9}{2x-3}$ ، وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني.

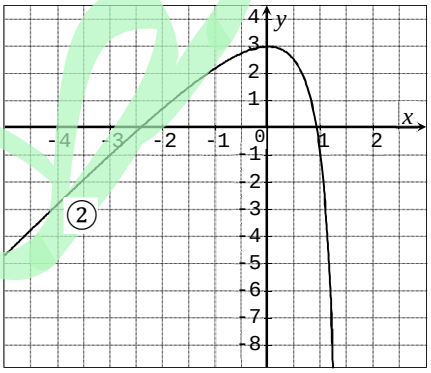
1) عيّن الأعداد الحقيقية $a$ , $b$ و $c$ بحيث من أجل كلّ $x\neq\frac{3}{2}$ فإنّ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2x-3}$ .

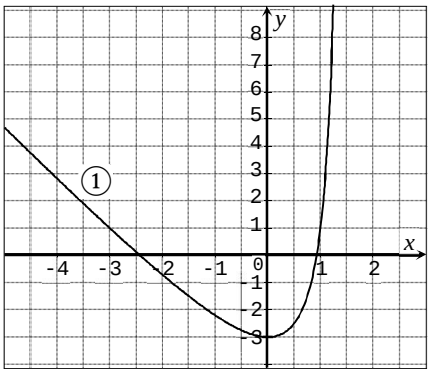
2) احسب النهايات عند حدود مجالي مجموعة تعريف الدالة $f$.

3) بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

4) من بين المنحنيات الثلاثة ① ، ② و ③ المبيّنة أسفله، عيّن مع التبرير المنحني الممثّل للدالة $f$ على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ .




**تمرين3** (5نقاط)

$f$ دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-4}$ ، حيث $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين.

1) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ، فإنّ $f'(x)=-\dfrac{\alpha x^2+2(\beta+4)x+4\alpha}{(x^2-4)^2}$ .

2) عيّن العددين $\alpha$ و $\beta$ بحيث المنحني الممثل للدالة $f$ يقبل عند النقطة $(1;1)$ مماسا معادلته $4x+3y-7=0$.

3) $g$ دالة عددية معرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2+4x-8}{x^2-4} & -2<x\leq1 \\ g(x)=x\sqrt{x+3}-1 & x>1 \end{cases}$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة $g$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

# تصحيح الفرض 1 للفصل 1 (2014)

## تمرين 1:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+6}{x^2+2x-8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3x+5}{(2x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^2-5x+13}{x^2-2x} = +\infty$ $\quad 13 \to$, $\quad 0^+ \to$ $\quad \begin{array}{ccccc} & 0 & & 2 & \\ + & + & - & + & \end{array}$

4) $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{x^2-4x-9}{x^2-4x+4} = -\infty$ $\quad -13 \to$, $\quad 0^+ \to$ $\quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ + & + & + \end{array}$

5) $\lim_{x \overset{>}{\to} 3} \frac{x^2+x+1}{-x^2+2x+3} = -\infty$ $\quad 13 \to$, $\quad 0^- \to$ $\quad \begin{array}{ccccc} & -1 & & 3 & \\ - & + & + & + & - \end{array}$

6) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x^2}\right)} - x\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4-\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}} - 1\right) = +\infty$

7) $\lim_{x\to-3} \frac{\sqrt{x^2-9x}-6}{x+3}$ نضع $f(x)=\sqrt{x^2-9x}$

$\lim_{x\to-3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = f'(-3)$

$f'(x) = \frac{2x-9}{2\sqrt{x^2-9x}}$ و منه $f'(-3) = \frac{5}{4}$

في الأخير $\lim_{x\to-3} \frac{\sqrt{x^2-9x}-6}{x+3} = \frac{-5}{4}$

8) $\lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^2-x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x(x-1)}$

$= \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} \times \lim_{x\to0} \frac{1}{x-1}$

بوضع $f(x)=\cos x$

$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

$f'(x) = -\sin x$ و منه $f'(0) = 0$

$\lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^2-x} = 0 \times -1 = 0$

9) $\lim_{x\to a} \frac{3x^2-2ax-a^2}{x^2-a^2} =$

$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(3x+a)}{(x-a)(x+a)} = \lim_{x\to a} \frac{3x+a}{x+a}$

$= \frac{4a}{2a} = 2 \quad (a \neq 0)$

و لما $a=0$ نجد 3.

## تمرين 2:

1) $f(x) = \frac{(ax+b)(2x-3)+c}{2x-3}$

$f(x) = \frac{2ax^2+(-3a+2b)x-3b+c}{2x-3}$

بالمطابقة مع $\frac{-4x^2-6x+9}{2x-3}$

نجد: $a=-2$ ، $b=-6$ و $c=-9$

$f(x) = -2x-6-\frac{9}{2x-3}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^2}{2x} = \lim_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{3}{2}} \frac{\overbrace{-4x^2-6x+9}^{\to -9}}{\underbrace{2x-3}_{\to 0^-}} = +\infty$$

$3/2$: $-$ | $+$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{3}{2}} \frac{\overbrace{-4x^2-6x+9}^{\to -9}}{\underbrace{2x-3}_{\to 0^+}} = -\infty$$

3) $\lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = \infty$ (مستقيم مقارب)

معادلته $x = \frac{3}{2}$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left[ f(x) - (-2x-6) \right] = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-9}{2x-3} = 0$$

(ومنه $y = -2x-6$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C)$ $(\Delta)$)

لدراسة الوضعية ندرس إشارة $\frac{-9}{2x-3}$

$3/2$: $+$ | $-$

لما $x > \frac{3}{2}$ $(C)$ يقع تحت $(\Delta)$

ولما $x < 3/2$ $(C)$ يقع فوق $(\Delta)$

4) المنحني ① هو الذي يمثل $f$.

لأن $f(0) = -3$ و $f(1) = 1$ ،

كذلك $\lim_{x \overset{<}{\to} 3/2} f(x) = +\infty$ ...

## تمرين 3:

1)

$$f'(x) = \frac{(2x+\alpha)(x^2-4) - 2x(x^2+\alpha x+\beta)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\alpha x^2 - 2(\beta+4)x - 4\alpha}{(x^2-4)^2}$$

2)

$$y = \frac{-4}{3}x + \frac{7}{3}$$

$f'(1) = \frac{-4}{3}$ و $f(1) = 1$

$$\begin{cases} \frac{1+\alpha+\beta}{-3} = 1 \\ \frac{-5\alpha-2\beta-8}{9} = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -4 \\ -5\alpha-2\beta = -4 \end{cases}$$

عند حلّ هذه الجملة نجد:

$\beta = -8$ و $\alpha = 4$

3) $g(1) = 1$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\left(\frac{x^2+4x-8}{x^2-4}\right) - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{4x-4}{(x-1)(x^2-4)} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{4}{x^2-4} = \frac{-4}{3}$$

$g$ قابلة للاشتقاق على يسار 1.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x\sqrt{x+3}-1)-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x\sqrt{x+3}-2)(x\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(x\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^3+3x^2-4}{(x-1)(x\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2+4x+4}{x\sqrt{x+3}+2} = \frac{9}{4}$$

$g$ قابلة للاشتقاق على يمين 1، لكن غير قابلة للاشتقاق عند 1