المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي ع.ت و ت.ر المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2015/2014 المدة: ثلاث ساعات (3سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين 1 (4نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتاليتان عدديتان معرفتان كما يلي: $u_n=\dfrac{e^{-2n+3}+4n-3}{2}$ و $v_n=\dfrac{e^{-2n+3}-4n+3}{2}$.

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع $x_n=u_n-v_n$ و $y_n=u_n+v_n$.

1) برهن أنّ (x_n) متتالية حسابية، يطلب حساب أساسها r وحدها الأول x_1.

2) احسب بدلالة n المجموع $S_1=x_1+x_2+...+x_n$، ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_1=2016$.

3) برهن أنّ (y_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها q وحدها الأول y_1.

4) احسب بدلالة n المجموع $S_2=y_1+y_2+...+y_n$، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $0\le S_2\le e+e^{-1}$.

5) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع $P_1=u_1+u_2+...+u_n$ و $P_2=v_1+v_2+...+v_n$.

بيّن أنّ المجموعين P_1 و P_2 يحقّقان $P_1=\dfrac{S_2+S_1}{2}$ و $P_2=\dfrac{S_2-S_1}{2}$.

تمرين 2 (4,5نقطة)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-2i$، $z_B=3-i$، $z_C=2+2i$ و $z_D=-2+4i$.

I - 1) بيّن أنّ $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.

2) بيّن أنّ النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة $(\mathscr{C})$ التي يطلب تعيين اللاحقة ω لمركزها ونصف قطرها r.

3) أنشئ المثلث ABC والدائرة $(\mathscr{C})$. وحدة الرسم 2cm.

4) عيّن أصغر عدد طبيعي n غير معدوم الذي من أجله يكون $(z_A+z_B+z_C+z_D)^n$ عددا حقيقيا موجبا.

II - ليكن التحويل s من المستوي. نرفق بالنقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=(1+i)z-2$.

1) عيّن الطبيعة الهندسية والعناصر المميّزة للتحويل s.

2) بيّن أنّ $s(B)=C$ وأنّ $s(C)=D$.

3) عيّن وأنشئ صورة المثلث ABC وصورة الدائرة $(\mathscr{C})$ بواسطة التحويل s.

4) بيّن أنّ المجموعة (E) للنقط M من المستوي حتى تكون $|iz-2|=|\bar{z}+2+4i|$ هي محور القطعة [AD].

اقلب الورقة

تمرين3 (4,5نقطة)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(2;3;0)$ ، $B(6;3;2)$ ، $C(3;6;-2)$ و $D(4;3;6)$ ، وليكن المستوي $(\mathscr{P})$ ذي المعادلة الديكارتية $2x+z-4=0$.

1) تحقّق أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية.

2) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(-3;5;6)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. استنتج معادلة للمستوي (ABC).

3) بيّن أنّ النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي $(\mathscr{P})$.

4) بيّن أنّ المستويين (ABC) و $(\mathscr{P})$ يتقاطعان وفق المستقيم (AC). أعط تمثيلا وسيطيا له.

5) بيّن أنّ المستقيمين (AC) و (BD) ليسا من المستوي نفسه.

6) لتكن المجموعة (E) للنقط M من الفضاء بحيث $MA^2-2MB^2+MD^2=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}$.

أ) تحقّق أنّ $AD^2=2AB^2$ ، ثم بيّن أنّ المجموعة (E) هي سطح كرة مركزها B وتشمل النقطة A.

ب) ادرس الوضع النسبي بين المجموعة (E) والمستقيم (AC).

تمرين4 (7نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2(1-x)-e^{x-1}$

1) احسب $g(0)$ ، وادرس نهاية الدالة g عند $+\infty$.

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة g على المجال $[0;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,6<\alpha<0,7$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1-x+2xe^{1-x}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1) احسب $f(0)$ ، وادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا $(\mathscr{D})$ معادلته $y=-x+1$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{D})$.

3) بيّن أنّه من أجل كل $x\geq 0$ ، $f'(x)=e^{1-x}[g(x)]$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا (Δ) موازيا للمستقيم $(\mathscr{D})$. اكتب معادلة المماس (Δ).

5) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثيتها.

6) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث $2,2<x_0<2,3$.

7) بيّن أنّ $f(\alpha)=-\alpha+\dfrac{1}{1-\alpha}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

8) ارسم المستقيم المقارب $(\mathscr{D})$، المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. اعتبر $f(\alpha)\approx 2,2$.

9) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $2xe^{1-x}-m+1=0$ حيث $x\geq 0$.

تصحيح إمتحان الفصل 2 (2015)

"عبد المطلب"

تمرين 1:

(1 $x_n = u_n - v_n = 4n - 3$

$x_{n+1} - x_n = 4(n+1) - 3 - 4n + 3 = 4$

$u_1 = 1$ و $r = 4$

(2 $S_1 = \frac{n}{2}(x_1 + x_n) = \frac{n}{2}(1 + 4n - 3)$

$S_1 = n(2n-1)$

$S_1 = 2016$ أي $2n^2 - n - 2016 = 0$

$n_1 = 32$ و $n_2 = -31{,}5$ (مرفوض)

(3 $y_n = u_n + v_n = e^{-2n+3}$

$y_{n+1} = e^{-2n-2+3} = e^{-2} \times e^{-2n+3} = q \cdot y_n$

$y_1 = e$ و $q = e^{-2}$

(4 $S_2 = y_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = e\left(\frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}}\right)$

$0 \leq S_2 \leq e + e^{-1}$

$0 \leq e(1-e^{-2n}) \leq (1-e^{-2})(e+e^{-1})$

$0 \leq e(1-e^{-2n}) \leq e - e^{-3}$

$0 \leq 1 - e^{-2n} \leq 1 - e^{-4}$

$-1 \leq -e^{-2n} \leq -e^{-4}$

$e^{-4} \leq e^{-2n} \leq 1$

$-4 \leq -2n \leq 0$

$0 \leq n \leq 2$

ومنه: $n \in \{0, 1, 2\}$

(5 عند حل هذه الجملة نجد:

$$\begin{cases} x_n = u_n - v_n \\ y_n = u_n + v_n \end{cases}$$

$u_n = \frac{y_n + x_n}{2}$ و $v_n = \frac{y_n - x_n}{2}$

$P_1 = \frac{y_1 + x_1}{2} + \frac{y_2 + x_2}{2} + \dots + \frac{y_n + x_n}{2}$

$= \frac{S_2 + S_1}{2}$

$P_2 = \frac{y_1 - x_1}{2} + \frac{y_2 - x_2}{2} + \dots + \frac{y_n - x_n}{2}$

$= \frac{S_2 - S_1}{2}$

تمرين 2:

(1-I $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3-i}{-1+3i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \frac{BA}{BC} = 1$ أي $BA = BC$

$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = (\vec{BC}; \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه ABC قائم ومتساوي الساقين.

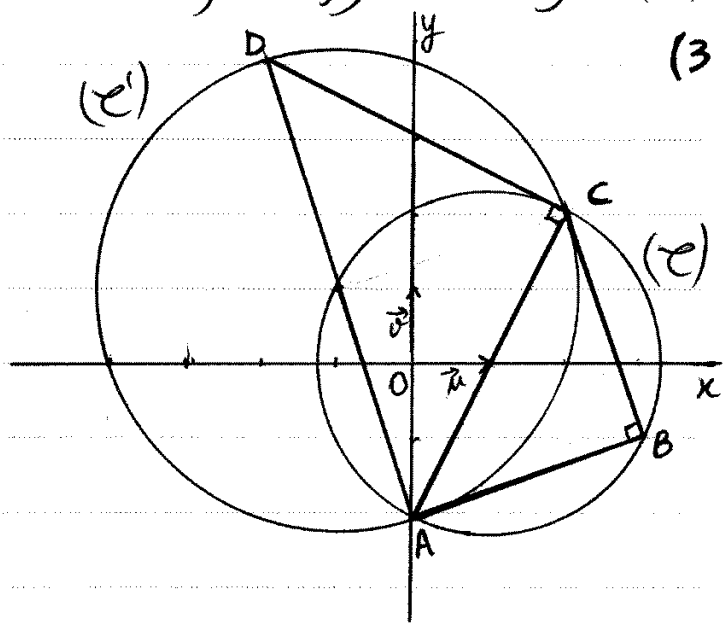
$S = \frac{1}{2} AB \times BC = 5\,ua$

2) لاحقة منتصف $[AC]$: $w = \frac{z_A + z_C}{2} = 1$

$|z_A - w| = |z_B - w| = |z_C - w| = r = \sqrt{5}$

(Γ) دائرة لاحقة مركزها w و $r = \sqrt{5}$.

(3



4) $z_A + z_B + z_C + z_D = 3 + 3i = 3\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$(z_A + z_B + z_C + z_D)^n =$

$(3\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

حقيقي موجب: $\sin\frac{n\pi}{4} = 0$ و $\cos\frac{n\pi}{4} > 0$

$\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ أي $n = 8k$

ومنه $n = 8$

II - 1) S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$، زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة A لأن

$\left(\frac{b}{1-a} = \frac{-2}{-i} = -2i = z_A\right)$

$S\left(A, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

2) $z_C = (1+i)z_B - 2$

و $z_D = (1+i)z_C - 2$

3) A نقطة صامدة، صورة B هي C وصورة C هي D بواسطة S. ومنه صورة المثلث ABC هو المثلث ACD.

صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي قطرها $[AC]$ هي الدائرة $(\mathcal{C}')$ التي قطرها $[AD]$.

4) $|iz - 2| = |\bar{z} + 2 + 4i|$

$|i(z+2i)| = |\overline{z+2-4i}|$

$|i|\,|z+2i| = |z+2-4i|$

$1\times|z - z_A| = |z - z_D|$

$AM = DM$

ومنه (E) هي المستقيم محور $[AD]$

تمرين 3:

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

لا يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\vec{AB} = k\vec{AC}$ أو $\frac{4}{1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{2}{-2}$

ومنه النقط A، B و C تشكل مستوٍ.

2) $\vec{n}\cdot\vec{AB} = -3(4) + 0 + 6(2) = 0$

و $\vec{n}\cdot\vec{AC} = -3(1) + 5(3) + 6(-2) = 0$

$-3x + 5y + 6z + d = 0$

نعوض إحداثيات A في المعادلة نجد:

$-3x + 5y + 6z - 9 = 0$

3) ليكن $\vec{n}'(2,0,1)$ شعاعا ناظميا لـ (P).

$\vec{AB} = 2\vec{n}'$ (مرتبطان خطيا) و $A \in (P)$.

4) A و C ينتميان إلى المستوي (ABC).

A و C ينتميان إلى المستوي (P).

$(t \in \mathbb{R})$ $\vec{AM} = t\vec{AC}$

التمثيل الوسيطي لـ (AC):
$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 3 \\ z = -2t \end{cases}$$

5) $\vec{BD}(-2, 0, 4)$

$(t' \in \mathbb{R})$ $\vec{BM} = t'\vec{BD}$

التمثيل الوسيطي لـ (BD):
$$\begin{cases} x = -2t' + 6 \\ y = 3 \\ z = 4t' + 2 \end{cases}$$

$\vec{BD}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا لأن $\frac{-2}{1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{-2}$.

إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي

$$\begin{cases} t+2=-2t'+6 & (1) \\ 3t+3=3 & (2) \\ -2t=4t'+2 & (3) \end{cases}$$

من (2) $t=0$ نعوضها في (1)

نجد $t'=2$ و نعوضها في (3)

فنجد $t'=-1/2$ و منه (AC)

و (BD) ليسا من نفس المستوي

$(D \notin (ABC)$ أو $)$

5) أ)

$MA^2-2MB^2+MD^2=2\vec{MA}.\vec{MD}$

$MA^2+MD^2-2\vec{MA}.\vec{MD}=2MB^2$

$(\vec{MA}-\vec{MD})^2=2MB^2$

$(\vec{DM}+\vec{MA})^2=2MB^2$

$DA^2=2MB^2$

$AB=\sqrt{20}$ و $AD=\sqrt{40}$

أي $AD^2=2AB^2$

$2AB^2=2MB^2$

$AB^2=MB^2$

في الأخير $MB=AB$

(E) هي سطح كرة مركزها B

و نصف قطرها $r=AB$ ،

ب) بما أن (AB) عمودي على

(AC) و $r=AB$ ، إذن المستقيم

(AC) مماسي لسطح الكرة (E)

عند النقطة A .

"عبد المطلب"

تمرين 4 :

I - 1) $g(0)=2-e^{-1}\simeq 1,63$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) $g'(x)=-2-e^{x-1}<0$

ومنه g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$	$2-e^{-1}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3) الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $[0,+\infty[$ ، $g(0,6)\simeq 0,13$

$g(0,7)\simeq -0,149$ أي $g(0,6)\times g(0,7)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $0,6<\alpha<0,7$.

إشارة $g(x)$:

$g(x)<0 : x>\alpha$

$g(x)>0 : 0\leq x<\alpha$

ولما $g(x)=0 : x=\alpha$.

0		α	
	$+$	0	$-$

II - 1) $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1-\lim\limits_{x\to+\infty} x(-1+2e^{1-x})=-\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=0$

(2 $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y\right)=\lim_{x\to+\infty} 2xe^{1-x}$

$=\lim_{x\to+\infty} 2e\left(\frac{x}{e^x}\right)=0$

لأن $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right)$

الوضعية: $f(x)-y=2xe^{1-x}$

$f(x)-y>0$ لما $x>0$: $(\mathcal{C})$ فوق (D)

$f(x)-y=0$ لما $x=0$: $(\mathcal{C})$ يقطع (D)

عند النقطة $(0,1)$

(3 $f'(x)=-1+(2-2x)e^{1-x}$

$f'(x)=e^{1-x}\left(\frac{-1}{e^{1-x}}+2-2x\right)$

$f'(x)=e^{1-x}\left(-e^{x-1}+2-2x\right)$

$f'(x)=e^{1-x}\times g(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

$f'(x)>0 : 0<x<\alpha$ منه f متزايدة.

ولما $f'(x)<0 : x>\alpha$ منه f متناقصة

لما $f'(x)=0 : x=\alpha$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

(4 $f'(x_0)=-1$

$-1+(2-2x_0)e^{1-x_0}=-1$

$(2-2x_0)e^{1-x_0}=0$ و منه $x_0=1$

$y=-1(x-1)+f(1)$

$y=-x+3$ (Δ)

(5 $f''(x)=(2x-4)e^{1-x}$

$A(2;0{,}47)$

		2	
	$-$	0	$+$

(6 f مستمرة ومتناقصة تماما على $]2{,}2;2{,}3[$

$f(2{,}2)\approx 0{,}13$ و $f(2{,}3)=-0{,}05$ أي $f(2{,}2)\times f(2{,}3)<0$

منه $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث

$2{,}2<x_0<2{,}3$. ($(\mathcal{C})$ يقطع Ox في نقطة وحيدة)

(7 $g(\alpha)=0$ أي $2-2\alpha-e^{\alpha-1}=0$

$e^{\alpha-1}=2-2\alpha$

$f(\alpha)=1-\alpha+2\alpha\left(\frac{1}{2-2\alpha}\right)$

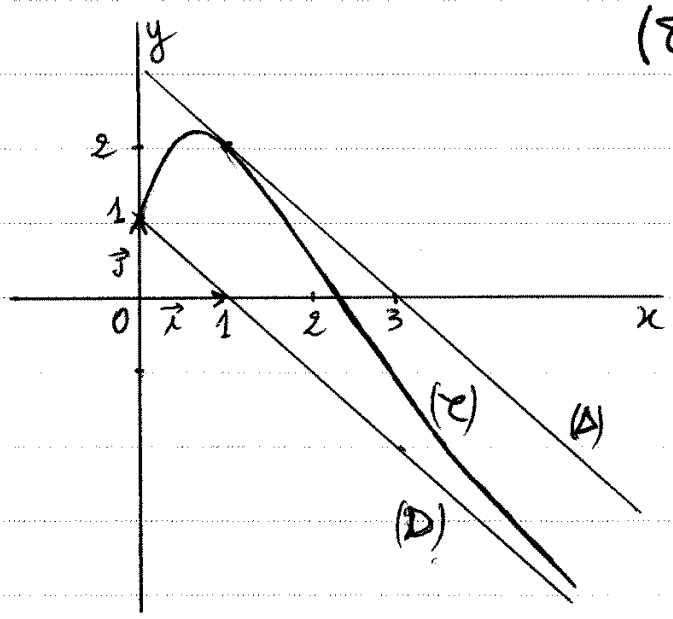
$f(\alpha)=-\alpha+\frac{1}{1-\alpha}$

$0{,}6<\alpha<0{,}7$ ؛ $-0{,}7<-\alpha<-0{,}6$

$0{,}3<1-\alpha<0{,}4$ ؛ $2{,}5<\frac{1}{1-\alpha}<3{,}3$

$1{,}8<-\alpha+\frac{1}{1-\alpha}<2{,}7$

(8



(9 $-x+1+2xe^{1-x}=-x+m$

تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المستقيمات: $y=-x+m$

$m<1$ لا يوجد حلول	$m=3$ حل مضاعف $(x=1)$
$m=1$ حل واحد معدوم	$m>3$ لا يوجد حلول
$1<m<3$ حلان متمايزان	

"عبد المطلب"