المؤسسة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) **المستوى:** ثالثة ثانوي ع-ت و ت-ر **المادة:** رياضيات	**الفرض الأول** **للفصل الثاني**	**الموسم الدراسي:** 2015/2014م **المدة:** ساعة ونصف ساعة (1سا 30د) **إعداد:** عبد المطلب

تمرين1 (10نقاط)

I- لتكن g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2x-2\ln(x+1)$.

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} g(x)$ ، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2) احسب $g'(x)$ ، شكّل جدول تغيرات الدالة g، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- لتكن f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+x+2\ln(x+1)}{x+1}$.

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ ، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) بيّن أنّه من أجل كل $x>-1$ فإنّ $f'(x)=\dfrac{g(x)+3}{(x+1)^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا $(\mathscr{D})$ معادلته $y=x$. عيّن معادلة للمستقيم المقارب الآخر.

4) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب $(\mathscr{D})$ مع تحديد نقطة تقاطعهما.

5) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا (Δ) موازيا للمستقيم $(\mathscr{D})$. اكتب معادلة المماس (Δ).

6) ارسم المستقيم المقارب $(\mathscr{D})$ ، المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

7) استعمل المنحني $(\mathscr{C})$ لتعيين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

تمرين2 (10نقاط)

I- لتكن f_α الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_\alpha(x)=\dfrac{\alpha x+1}{e^{x-1}}$. (α وسيط حقيقي غير معدوم)

عيّن قيمة α حتى يقبل المنحني الممثل للدالة f_α عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.

II- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)e^{-x+1}$.

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، وبيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا في جوار $+\infty$ معادلته $y=0$.

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أثبت أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثيتيها. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة A.

4) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$ على المجال $[-1;+\infty[$.

5) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(|x|+1)e^{1-|x|}$

أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=0$. (عبارة $g'(x)$ غير مطلوبة)

- ماذا يمكن قوله عن قابلية اشتقاق الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة؟

ب) بيّن أنّ الدالة g زوجية ثم استعمل المنحني $(\mathscr{C})$ لرسم المنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة g.

انتهى

تصحيح الفرض 1 للفصل 2 : 2014

تمرين 1 : "عبد المطلب"

I - 1) $\lim_{x \to -1^{>}} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \to -1^{>}} \ln(x+1) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\frac{x^2+2x}{x+1} - 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

2) $g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$

إشارة $g'(x)$:

x		-2		-1		0	
	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات : $g(x) \geq 0$

II - 1) $\lim_{x \to -1^{>}} f(x) = -\infty$

لأن $\lim_{x \to -1^{>}} \ln(x+1) = -\infty$ و $\lim_{x \to -1^{>}} (x+1) = 0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = +\infty$$

2) $$f'(x) = \frac{\left(2x+1+\frac{2}{x+1}\right)(x+1) - 1\left(x^2+x+2\ln(x+1)\right)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)+3}{(x+1)^2}$$

بما أن $g(x) \geq 0$ فإن $f'(x) > 0$.

ومنه f متزايدة تماما على $x > -1$.

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

ومنه $y = x$ مستقيم مقارب لـ (C) .

$\lim_{x \to -1^{>}} f(x) = -\infty$ ومنه $x = -1$ مستقيم مقارب لـ (C)

4) ندرس إشارة $(f(x) - y)$ أي $\frac{2\ln(x+1)}{x+1}$

$f(x) - y = 0$ لما $\ln(x+1) = 0$ أي $x = 0$

$f(x) - y > 0$ لما $x > 0$ ((C) فوق (D))

$f(x) - y < 0$ لما $-1 < x < 0$ ((C) تحت (D))

(C) يقطع (D) عند النقطة $(0,0)$.

5) $f'(x_0) = 1$ أي $\frac{g(x_0)+3}{(x_0+1)^2} = 1$

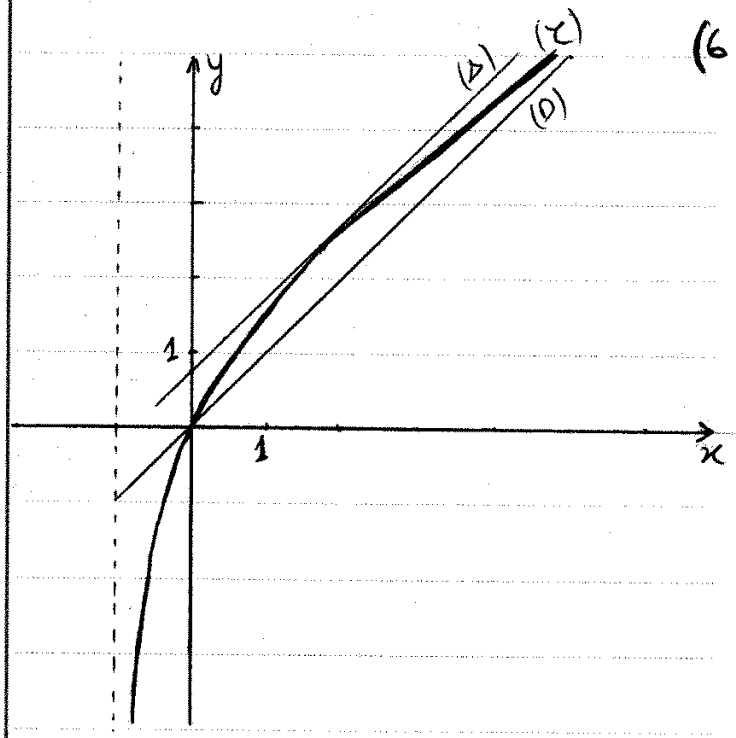
$$x_0^2 + 2x_0 + 3 - 2\ln(x_0+1) = (x_0+1)^2$$

$\ln(x_0+1) = 1$ ومنه $\boxed{x_0 = e-1}$

$$y = 1(x - e + 1) + f(e-1)$$

$$y = x + \frac{2}{e} \quad (\Delta)$$

6)



7) $0 < m < \frac{2}{e}$

تمرين 2:

I- $f'_\alpha(x) = (-\alpha x + \alpha - 1)e^{-x+1}$

$f'_\alpha(0) = (\alpha - 1)e = 0$ و منه $\alpha = 1$

II- 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\times e + e^{-x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\times e + e^{-x+1}\right) = 0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+1} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$

2) $f'(x) = -xe^{-x+1}$

إشارة $f'(x)$:

		0	
	+	0	−

لما $x \leq 0$: f متزايدة

ولما $x \geq 0$: f متناقصة.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	0

3) $f''(x) = (x-1)e^{-x+1}$

$f''(x) = 0$ لما $x = 1$

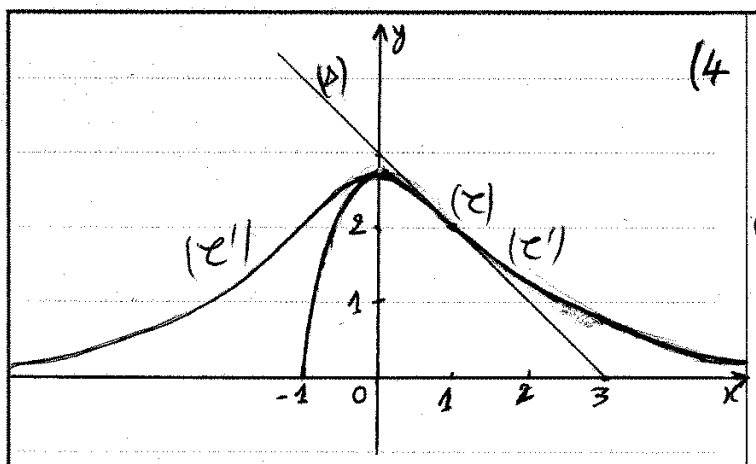
		1	
	−	0	+

ومنه $A(1,2)$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

(Δ) $y = -x + 3$

4)



5) أ)

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{(x+1)e^{1-x}-e}{x}$$

$$= \lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(e^{1-x} - e\times\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)\right) = 0 = g'_d(0)$$

لأن $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{e^{-x}-1}{-x} = 1$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{(-x+1)e^{1+x}-e}{x}$$

$$= \lim_{x\overset{<}{\to}0}\left(-e^{1+x} + e\times\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\right) = 0 = g'_g(0)$$

لأن $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند 0 لأن $g'_g(0) = g'_d(0) = 0$

ب) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = (|-x|+1)e^{1-|-x|} = (|x|+1)e^{1-|x|}$$

$$g(-x) = g(x)$$

ومنه g زوجية

لما $x \geq 0$: $g(x) = f(x)$. (C') يطابق (C)

ولما $x \leq 0$: $g(x) = f(-x)$. (C') يناظر (C) بالنسبة لـ yy'