المؤسسة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) **المستوى:** ثالثة ثانوي ع-ت و ت-ر **المادة:** رياضيات	**الفرض الثالث** **للفصل الثاني**	**الموسم الدراسي:** 2014/2015م **المدة:** ساعة ونصف ساعة (1سا 30د) **إعداد:** عبد المطلب

تمرين1 (08نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث الوحدة 2cm. M نقطة لاحقتها العدد المركب $z=x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب $z\neq 2$ العدد المركب Z حيث: $Z=\dfrac{i(z+2-3i)}{z-2}$.

1) بيّن أنّ الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z=\dfrac{3x+4y-6}{(x-2)^2+y^2}+i\,\dfrac{x^2+y^2-3y-4}{(x-2)^2+y^2}$.

2) عيّن وأنشئ المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا.

3) عيّن وأنشئ المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

4) عيّن وأنشئ المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون طويلة Z تساوي 1.

5) لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب $z_A=2$ و $z_B=-2+3i$. بيّن أنّ مجموعة النقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا موجبا تماما $(Z\in\mathbb{R}_+^*)$ تُحقّق: $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

تمرين2 (12نقطة)

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(iz+2)(z^2-4\sqrt{3}z+16)=0$.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=2i$ ، $z_B=2\sqrt{3}+2i$ و $z_C=2\sqrt{3}-2i$.

1) اكتب z_A ، z_B ، z_C و $(2z_A+4)$ على الشكل الأسي، ثم بيّن أنّ $\left(\dfrac{2z_A+4}{\sqrt{2}z_C}\right)^{1436}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) لتكن النقطة D صورة النقطة C بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. بيّن أنّ $z_D=2\sqrt{3}+(2-2\sqrt{3})i$.

3) أ) احسب $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABD.

ب) استنتج أنّ النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة.

4) لتكن النقطة E تحقّق $\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{AE}$ ، ولتكن النقطة F منتصف القطعة [AE].

أ) بيّن أنّ لاحقة النقطة E هي $z_E=2$ ، وأنّ لاحقة النقطة F هي $z_F=1+i$.

ب) عيّن العدد الحقيقي α بحيث تكون النقطة E مرجحا للجملة $\{(O,-\sqrt{3});(A,1);(B,\alpha)\}$.

ج) نعتبر المجموعة $(\mathscr{E})$ للنقط M من المستوي بحيث $\left\|-\sqrt{3}\,\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\sqrt{3}MA$.

بيّن أنّ النقطتين O و F تنتميان إلى $(\mathscr{E})$ ثم استنتج المجموعة $(\mathscr{E})$.

تصحيح الفرض 3 للفصل 2 : 2015

"عبد المطلب"

تمرين 1 :

1)

$$z = \frac{i(x+iy+2-3i)}{x+iy-2} = \frac{ix-y+2i+3}{x-2+iy}$$

(المرافق)

$$z = \frac{3x+4y-6}{(x-2)^2+y^2} + i\,\frac{x^2+y^2-3y-4}{(x-2)^2+y^2}$$

2) z حقيقي إذا كان الجزء التخيلي معدوما

$x^2+y^2-3y-4=0$ مع $(x;y)\neq(2;0)$

$x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ مع $(x,y)\neq(2,0)$

E_1 هي دائرة مركزها $(0,3/2)$ ونصف قطرها $\frac{5}{2}$ ماعدا النقطة $(2,0)$

3) z تخيليا صرفا ما الجزء الحقيقي معدوما

$3x+4y-6=0$ مع $(x,y)\neq(2,0)$

E_2 هي مستقيم معادلته $y=\frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}$ باستثناء النقطة $(2,0)$.

4) $|z|=1$ أي $\left|\frac{i(z+2-3i)}{z-2}\right|=1$

$$|i(z+2-3i)| = |z-2|$$

$$|i(x+iy+2-3i)| = |x+iy-2|$$

$$|(-y+3)+i(x+2)| = |(x-2)+i(-y)|$$

$$\sqrt{(y-3)^2+(x+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

$$8x-6y+9=0$$

E_3 هي مستقيم معادلته: $y=\frac{4}{3}x+\frac{3}{2}$

5)

$$\arg(z) = \arg\left[\frac{i(z-z_B)}{z-z_A}\right]$$

$$\arg(z) = \arg(i) + \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})$$

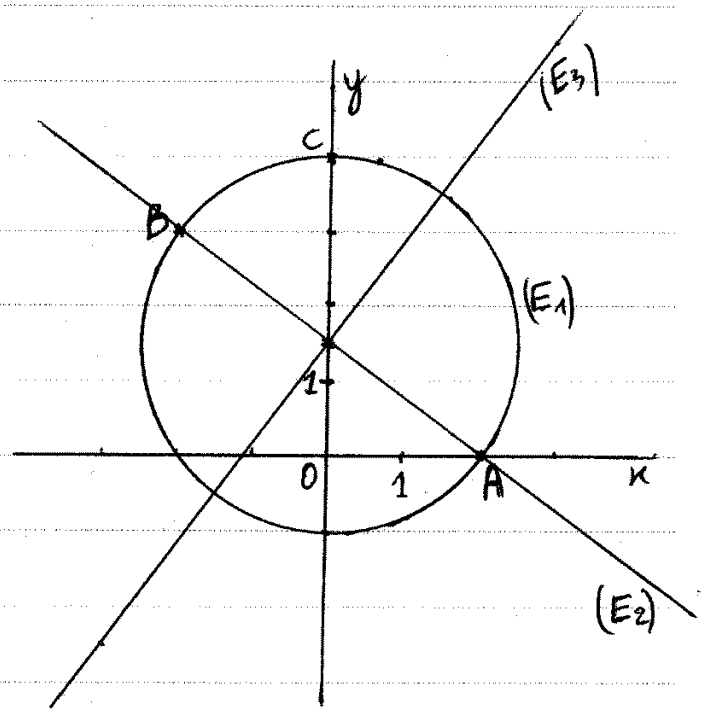
z حقيقيا موجبا تماما إذا كان الجزء التخيلي معدوما والجزء الحقيقي موجب تماما أي إذا كانت

$\arg(z) = 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

$$\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = 2k\pi$$

ومنه: $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$

ملاحظة: مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء A و B وتشمل النقطة $C(0,4)$ أو (المثلث AMB مباشر).



تمرين 2: "عبد المطلب"

I- $iz + 2 = 0$ أي $z_1 = \frac{-2}{i} = 2i$

$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

$\Delta = -16 = 16i^2$ ومنه $z_3 = 2\sqrt{3} + 2i$ و $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$

II 1)

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_C = 4e^{i(-\frac{\pi}{6})}$ و $(2z_A + 4) = 4\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$

$$\frac{2z_A+4}{\sqrt{2}z_C} = \frac{4+4i}{\sqrt{2}(2\sqrt{3}-2i)} = \frac{4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6})}} = e^{i(\frac{5\pi}{12})}$$

$$\left(\frac{2z_A+4}{\sqrt{2}z_C}\right)^{1436} = e^{i(\frac{5\pi}{12}\times 1436)}$$

$$= e^{i\frac{7180\pi}{12}} = e^{i(598\pi + \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

2) $z' = az + b$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{b}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} + 2i$

أي: $b = 2\sqrt{3} - 3 + (2-\sqrt{3})i$

ومنه $z' = \frac{\sqrt{3}}{2}z + 2\sqrt{3} - 3 + (2-\sqrt{3})i$

$$z_D = \frac{\sqrt{3}}{2}z_C + 2\sqrt{3} - 3 + (2-\sqrt{3})i$$

$$z_D = 2\sqrt{3} + (2-2\sqrt{3})i$$

أو يمكن استعمال العبارة المركبة للتحاكي:

$$z' - w = a(z - w)$$

$$z_D - z_B = \frac{\sqrt{3}}{2}(z_C - z_B) \cdots$$

3) أ)

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-2\sqrt{3}i}{-2\sqrt{3}} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left|\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}\right| = \frac{BD}{BA} = 1$$

ومنه $BD = BA$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\vec{BA}, \vec{BD}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه ABD مثلث قائم ومتساوي الساقين.

ب) $z_D - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_B)$

باستعمال العبارة المركبة للدوران:

$$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$

نجد أن D هي صورة A بالدوران $r(B, \frac{\pi}{2})$ الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

4) أ) $\vec{AD} = \sqrt{3}\vec{AE}$

$$z_D - z_A = \sqrt{3}(z_E - z_A)$$

نجد: $z_E = 2$

$$z_F = \frac{z_A + z_E}{2} = 1 + i$$

ب) $$z_E = \frac{0 + z_A + \alpha z_B}{-\sqrt{3} + 1 + \alpha} = 2$$

$$z_E = \frac{2\sqrt{3}\alpha}{-\sqrt{3}+1+\alpha} + i\,\frac{2\alpha + 2}{-\sqrt{3}+1+\alpha} = 2$$

$2\alpha + 2 = 0$ و $2\sqrt{3}\alpha = 2(-\sqrt{3}+1+\alpha)$

في الأخير نجد: $\alpha = -1$

ج) $$\|-\sqrt{3}\vec{MO} + \vec{MA} - \vec{MB}\| = \sqrt{3}MA$$

$$\|-\sqrt{3}(\vec{ME} + \vec{EO}) + (\vec{ME} + \vec{EA}) - (\vec{ME} + \vec{EB})\| = \sqrt{3}MA$$

$$\|-\sqrt{3}\vec{ME} \underbrace{-\sqrt{3}\vec{EO} + \vec{EA} - \vec{EB}}_{\vec{0}}\| = \sqrt{3}MA$$

$$ME = MA$$

$O \in (\mathcal{C})$: $OE = OA$ أي $2 = 2$ (محققة)

$F \in (\mathcal{C})$: $FE = FA$ أي $\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (محققة)

$(\mathcal{C})$ هي محور $[AE]$ أي المستقيم (OF).

"عبد المطلب"