المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) دورة: ماي 2015

الشعبة: علوم تجريبية إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3سا و 30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_1=-1$ و $u_{n+1}=\dfrac{2(u_n+\alpha)+1}{5}$، حيث $\alpha\in\mathbb{R}-\{-2\}$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\dfrac{-3u_n+2\alpha+1}{2}$.

1- برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$، يطلب حساب حدها الأول v_1.

2- اكتب عبارة كلا من v_n و u_n بدلالة n و α. احسب نهاية المتتالية (u_n).

3- ناقش حسب قيم العدد α اتجاه تغيّر المتتالية (v_n).

4- احسب بدلالة n و α المجموعين: $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ و $S'_n=u_1+u_2+...+u_n$.

5- نضع $\alpha=-5$، ولتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $w_n=\ln(u_n+3)$.

أ) بفرض أنّ $u_n+3>0$، برهن أنّ (w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln 2-\ln 5$، يطلب حساب w_1.

ب) نضع: $P_n=(u_1+3)\times(u_2+3)\times...\times(u_n+3)$. بيّن أنّ $P_n=\sqrt{e^{n[(n+1)\ln 2-(n-1)\ln 5]}}$.

التمرين الثاني: (03,5 نقطة)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(1;1;2)$ ، $B(3;0;0)$ ، $C(-1;-2;0)$ ، $D(0;6;-6)$ و $E(1;5;6)$. أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير على ما يلي:

1- المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $x-2y+2z-3=0$.

2- التمثيل الوسيطي للمستقيم (AD) هو $\begin{cases}x=t\\y=6-5t\\z=-6+8t\end{cases}$، حيث t عدد حقيقي.

3- النقطة D تنتمي إلى المستوي (ABC).

4- المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) تساوي 10.

5- النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

6- النقطة E هي مرجح الجملة $\{(A,3);(B,-1);(C,-1)\}$.

7- المعادلة الديكارتية للمستوي (P) العمودي على (AD) والذي يشمل E هي $x-5y+8z-23=0$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B ، C و D من هذا المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1$ ، $z_B=5-2i$ ، $z_C=3+4i$ و $z_D=-3+2i$.

1- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ $(z_A+z_C)^{8n}=(z_B+z_D)^{20n}$.

2- بيّن أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC. مثّله.

3- لتكن I منتصف القطعة [BC]. اكتب معادلة الدائرة $\mathscr{C}$ المحيطة بالمثلث ABC. مثّلها.

4- لتكن E نظيرة C بالنسبة لـ B. بيّن أنّ لاحقة E هي $z_E=7-8i$.

5- أ) عيّن مركز وزاوية الدوران r الذي يحوّل B إلى C ويحوّل C إلى D. أنشئ $\mathscr{C}'$ صورة $\mathscr{C}$ بواسطة r.

ب) عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر s الذي مركزه C ويحوّل I إلى D.

ج) اكتب العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه E ونسبته 2، ثم بيّن أنّ $h=sor$.

التمرين الرابع: (07,5 نقطة)

I- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+1}{x}+\ln x$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ماذا يمثل المستقيم ذو المعادلة $x=0$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C})$؟

2- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+\ln x$.

أ) اشرح كيفية رسم المنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة g انطلاقا من بيان الدالة ln.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$. ماذا يمكن قوله عن المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$؟

ج) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}')$.

4- احسب $f(2)$ ، $f(5)$ ، $g(2)$ و $g(5)$ ثم ارسم المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

5- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ $\int_n^{n+1}\ln x\,dx=(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-1$. $(n\in\mathbb{N}^*)$

ب) احسب المساحة u_n للحيّز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمستقيمين: $x=n$ و $x=n+1$.

ج) نضع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. بيّن أنّ $S_n=(n+2)\ln(n+1)$.

II- f_m الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f_m(x)=\frac{x+1}{x}+m\ln x$ (m وسيط حقيقي موجب تماما)

1- بيّن أنّ جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$ الممثلة للدالة f_m تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

2- ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C}_{m+1})$ بالنسبة المنحني $(\mathscr{C}_m)$.

3- عيّن قيمة العدد الحقيقي m بحيث يقبل $(\mathscr{C}_m)$ نقطة انعطاف فاصلتها 2.

المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) دورة: ماي 2015

الشعبة: علوم تجريبية إعداد: عبد المطلب

بكالويا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3سا و 30د

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(-1;1;-4)$ و $B(0;1;-2)$.

ليكن $(\mathscr{P})$ المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

1- بيّن أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$ هي $2x+4z+13=0$.

2- أوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\mathscr{D})$ الذي يشمل B و $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع توجيه له.

3- ليكن (π_m) مستوٍ معادلته الديكارتية: $mx-(m+2)y+(m-2)z+3m-2=0$. (m وسيط حقيقي)

أ) بيّن أنّ المستقيم $(\mathscr{D})$ محتوى في المستوي (π_m).

ب) عيّن قيمة m حتى يمس المستوي (π_m) سطح الكرة (S) التي مركزها A وتشمل B.

ج) هل المستقيم $(\mathscr{D})$ مماسي للكرة (S)؟ علّل.

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلتين: $z^2-6z+13=0$ و $z.\bar{z}-6z-11+12i=0$.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B ، C و D من هذا المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-1+2i$ ، $z_B=3-2i$ ، $z_C=7+2i$ و $z_D=3+2i$.

1- عيّن طبيعة المثلثين ABC و ABD. بيّن أنّهما متشابهان.

2- لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث $|iz+2+i|=|\bar{z}-3-2i|$، ولتكن (F) مجموعة النقط M بحيث $z=2\sqrt{2}e^{i\theta}+1$ ، $(\theta\in\mathbb{R})$. بيّن أنّ (E) هي محور القطعة [AB] وأنّ (F) هي دائرة قطرها [AB].

3- نعتبر التحويل T من المستوي الذي يرفق بالنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}+i$.

أ) عيّن الطبيعة الهندسية والعناصر المميّزة للتحويل T.

ب) عيّن A' و B' صورتي A و B بالتحويل T. استنتج (E') و (F') صورتي (E) و (F) بالتحويل T.

ج) أنشئ المثلثين ABC و ABD، والمجموعات (E) ، (F) ، (E') و (F').

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n \le 2$.

2- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$.

ب) استنتج اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n).

3- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 - u_{n+1} \le \dfrac{2-u_n}{2}$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le 2 - u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الرابع: (07,5 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty\,;\ln 2[\,\cup\,]\ln 2\,;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{e^x - 2}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$.

1- بيّن أنّه من أجل كل $x \ne \ln 2$، $f(x) = x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{e^x}{2(e^x-2)}$.

2- احسب النهايات عند حدود مجالي تعريف الدالة f.

- بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة يطلب كتابة معادلاتها.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4- أثبت أنّ النقطة $\left(\ln 2\,;\ln 2 - \dfrac{5}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$، ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

5- اكتب معادلتي المماسين للمنحني $(\mathscr{C})$ بحيث يكون معامل توجيه كل منهما يساوي -2.

6- عيّن قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + \dfrac{m}{2}$ حلا وحيدا سالبا تماما.

7- λ عدد حقيقي سالب تماما. احسب بـ cm^2 بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحني $(\mathscr{C})$، والمستقيمات ذات المعادلات: $x = 0$، $x = \lambda$ و $y = x - \dfrac{3}{2}$.

- عيّن نهاية $A(\lambda)$ لما $\lambda \to -\infty$.

وفّقكم الله أعزائي الطلاب في البكالوريا

تصحيح البكالوريا التجريبي 2015م

الموضوع الأول

تمرين 1:

1) $v_{n+1} = \frac{-3u_{n+1}+2\alpha+1}{2} = \frac{-3\left(\frac{2u_n+2\alpha+1}{5}\right)+2\alpha+1}{2}$

$v_{n+1} = \frac{-6u_n+4\alpha+2}{10} = \frac{2}{5}\left(\frac{-3u_n+2\alpha+1}{2}\right) = \frac{2}{5}v_n$

$v_1 = \frac{3+2\alpha+1}{2} = \frac{2\alpha+4}{2} = \alpha+2$

2) $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = (\alpha+2)\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

$u_n = \frac{-2v_n+2\alpha+1}{3} = \frac{-2(\alpha+2)\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+2\alpha+1}{3}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2\alpha+1}{3}$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$

3) $v_{n+1}-v_n = (\alpha+2)\left(\frac{2}{5}\right)^n - (\alpha+2)\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

$v_{n+1}-v_n = (\alpha+2)\left(\frac{2}{5}\right)^n\left(1-\frac{5}{2}\right) = \frac{-3}{2}(\alpha+2)\left(\frac{2}{5}\right)^n$

-2: $+$ 0 $-$

$\alpha > -2$: (v_n) متناقصة تماما.

$\alpha < -2$: (v_n) متزايدة تماما.

4) $S_n = v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = (\alpha+2)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}\right)$

$S_n = \frac{5}{3}(\alpha+2)\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$

$S'_n = \frac{-2v_1+2\alpha+1}{3} + \frac{-2v_2+2\alpha+1}{3} + \dots + \frac{-2v_n+2\alpha+1}{3}$

$S'_n = \frac{-2S_n+(2\alpha+1)n}{3} = \frac{-10}{9}(\alpha+2)\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{(2\alpha+1)}{3}n$

5) أ) $w_{n+1} = \ln(u_{n+1}+3) = \ln\left(\frac{2u_n-9}{5}+3\right)$

$w_{n+1} = \ln\left(\frac{2u_n+6}{5}\right) = \ln\left[\frac{2}{5}(u_n+3)\right]$

$w_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{5}\right) + \ln(u_n+3) = \ln\left(\frac{2}{5}\right) + w_n$

ومنه: $r = w_{n+1}-w_n = \ln 2 - \ln 5$

$w_1 = \ln(u_1+3) = \ln 2$

ب) $w_n = \ln(u_n+3)$ ومنه: $u_n+3 = e^{w_n}$

$P_n = e^{w_1} \times e^{w_2} \times \dots \times e^{w_n}$

$P_n = e^{w_1+w_2+\dots+w_n} = e^{\frac{n}{2}(w_1+w_n)}$

$P_n = e^{\frac{n}{2}[w_1+w_1+(n-1)r]} = e^{\frac{n}{2}[2\ln 2+(n-1)(\ln 2-\ln 5)]}$

ومنه: $P_n = \sqrt{e^{n[(n+1)\ln 2-(n-1)\ln 5]}}$

تمرين 2:

1) $A \in (ABC)$: $1-2(1)+2(2)-3=0$

$B \in (ABC)$: $3-2(0)+2(0)-3=0$

$C \in (ABC)$: $-1-2(-2)+2(0)-3=0$

صحيح

2) $A \in (AD)$: $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$

ومنه: صحيح

$O \in (AD)$: $\begin{cases} t=0 \\ t=0 \\ t=0 \end{cases}$

3) $O \notin (ABC)$: $0-2(6)+2(-6)-3 \neq 0$

خطأ

4) $d = \frac{|0-2(6)+2(-6)-3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{27}{3} = 9$

خطأ

5) $\vec{BD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix}$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\vec{BD} = -3\vec{n}$ (مرتبطان خطيا)

و $B \in (ABC)$: صحيح

6) $E\left(\frac{3(1)-1(3)-1(-1)}{3-1-1}; \frac{3(1)-0-1(-2)}{3-1-1}; \frac{3(2)-0-0}{3-1-1}\right)$

ومنه: $E(1,5,6)$ صحيح

7) $\vec{AD}\begin{pmatrix}-1\\5\\-8\end{pmatrix}$ و $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\-5\\8\end{pmatrix}$. لاحظ $\vec{AD} = -\vec{n'}$

أي (AD) عمودي على (P) ولكن $E \notin (P)$. خطأ

تمرين 3:

1) $z_A + z_C = 4+4i$ و $z_B + z_D = 2$

$(z_A+z_C)^{8n} = (4+4i)^{8n} = 4^{8n}(1+i)^{8n}$

$(z_A+z_C)^{8n} = 4^{8n}\left[(1+i)^2\right]^{4n} = 4^{8n}\left[(2i)^2\right]^{2n}$

$(z_A+z_C)^{8n} = 4^{8n}(-4)^{2n} = 4^{8n}\times 4^{2n} = 4^{10n}$

$(z_B+z_D)^{20n} = 2^{20n} = (2^2)^{10n} = 4^{10n}$

يمكن استعمال الشكل الأسي أو المثلثي

2)

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{2+4i}{4-2i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{5i}{5} = i = 1.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$$

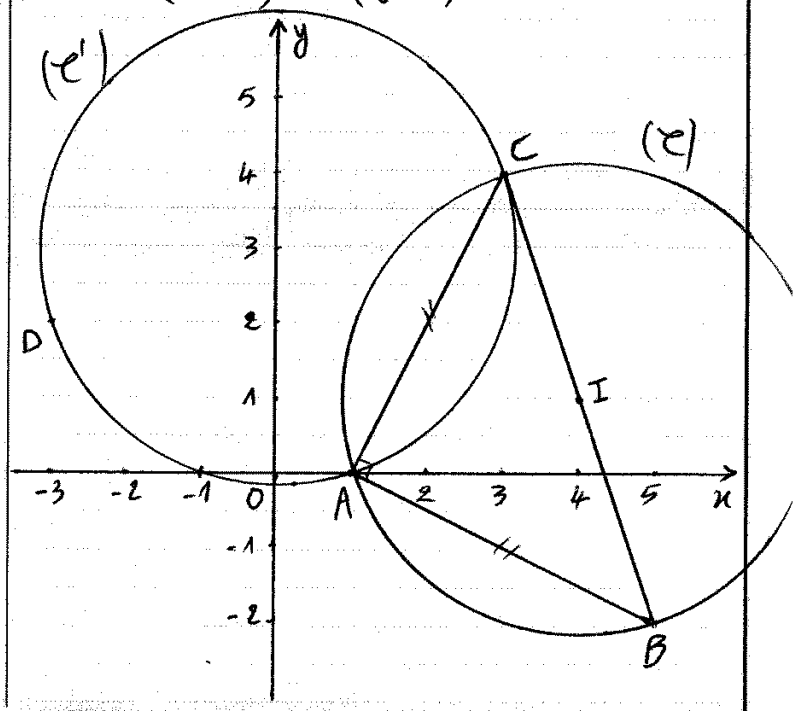
$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = (\vec{AB},\vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه ABC قائم في A ومتساوي الساقين

3) بما أن ABC قائم، مركز الدائرة (C) هو النقطة I ونصف قطرها $r = \frac{BC}{2}$.

$z_I = \frac{z_B+z_C}{2} = 4+i$ و $r=\sqrt{10}$

$$(x-4)^2+(y-1)^2 = 10$$



4) $z_B = \frac{z_C+z_E}{2}$ ومنه $z_E = 2z_B - z_C$

$z_E = 10-4i-3-4i = 7-8i$

5) أ) $r(B) = C$ و $r(C) = D$

$$\begin{cases} z_C = a z_B + b & (1) \\ z_D = a z_C + b & (2) \end{cases}$$

(2)-(1) ينتج: $a = \frac{z_D-z_C}{z_C-z_B} = \frac{-6-2i}{-2+6i} = i$

نعوض في (1) نجد: $b = 1-i$

ومنه: $z' = iz+1-i$ (r)

مركز الدوران هو النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

(C') دائرة قطرها [BC] و (C) دائرة قطرها [CD]

ب) $\begin{cases} z_C = a z_C + b \\ z_D = a z_I + b \end{cases}$ أو نستعمل: $z'-w = a(z-w)$

$a = \frac{z_D-z_C}{z_I-z_C} = \frac{-6-2i}{1-3i} = -2i$

و $b = -5+10i$

$z' = -2iz-5+10i$ (s)

نسبة التشابه هو 2 وزاويته $\frac{-\pi}{2}$.

ج) $z'-w = a(z-w)$

$z'-z_E = 2(z-z_E)$

$z'-7+8i = 2z-2(7-8i)$

$z' = 2z-7+8i$ (h)

$h = s \circ r$

$z' = -2i(iz+1-i)-5+10i$

$z' = 2z-2i-2-5+10i$

$z' = 2z-7+8i$: (sor)

تمرين 4:

I 1) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x+1+x\ln x}{x} = +\infty$

لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$x=0$: مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C})$.

2) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) انسحاب شعاعه $\binom{0}{1}$

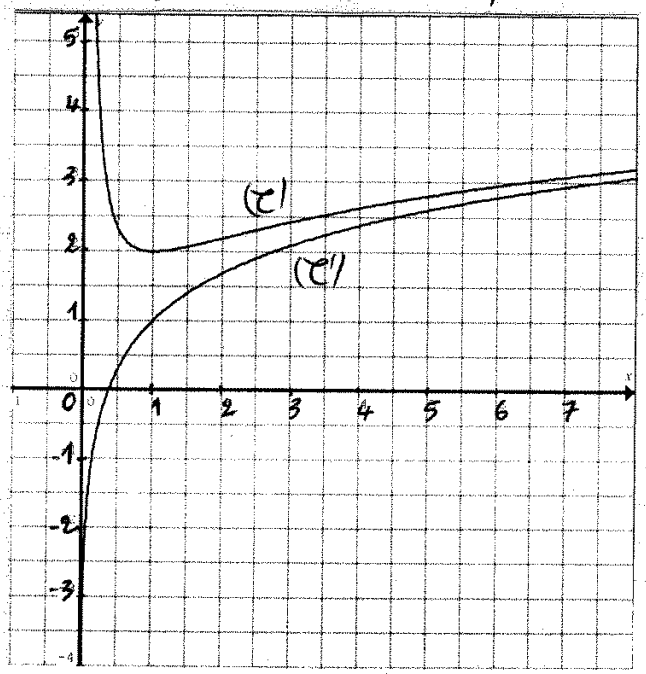
ب) $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

$(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ متقاربان في جوار $+\infty$

ج) $f(x)-g(x) = \frac{1}{x} > 0$

ومنه $(\mathcal{C}')$ فوق $(\mathcal{C})$ $(\forall x>0)$

4) $f(2)=2{,}2$ ؛ $f(1)=2{,}8$ ؛ $g(2)=1{,}7$ ؛ $g(1)=2{,}6$



5) أ) $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$\int_n^{n+1} \ln x\,dx = [x\ln x]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} 1\,dx$

$= [x\ln x - x]_n^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n\ln n - 1$

ب) $U_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+1}\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + \int_n^{n+1}\ln x\,dx$

$U_n = [x+\ln x]_n^{n+1} + [x\ln x - x]_n^{n+1}$

$U_n = [(x+1)\ln x]_n^{n+1} = (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln n$

ج) طريقة 1: علاقة شال

$S_n = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx$

$S_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx = [(x+1)\ln x]_1^{n+1} = (n+2)\ln(n+1)$

طريقة 2:

$S_n = 3\ln 2 - 2\ln 1 +$
$4\ln 3 - 3\ln 2 +$
$\vdots$
$(n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln n$

$S_n = (n+2)\ln(n+1)$

II 1) $y_0 = \frac{x_0+1}{x_0} + m\ln x_0$

$m\ln x_0 + \frac{x_0+1}{x_0} - y_0 = 0$

$\begin{cases} \ln x_0 = 0 \\ \frac{x_0+1}{x_0} = y_0 \end{cases}$ نجد $(1,2)$

2) $f_{m+1}(x) - f_m(x) = \ln x$

$x>1$: $(\mathcal{C}_{m+1})$ فوق $(\mathcal{C}_m)$.

$0<x<1$: $(\mathcal{C}_{m+1})$ تحت $(\mathcal{C}_m)$.

$(\mathcal{C}_{m+1})$ يقطع $(\mathcal{C}_m)$ عند $(1,2)$.

3) $f_m''(x) = \frac{-mx+2}{x^3}$

$f_m''(2) = 0$ لما $-2m+2=0$

ومنه $\boxed{m=1}$

تصحيح البكالوريا التجريبي 2015م

الموضوع الثاني

تمرين 1:

1) لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ ولتكن I منتصف [AB] : $I\left(\frac{-1}{2};1;-3\right)$

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا لـ (P).

لاحظ أنّ $I\in(P)$ و $\vec{n}=2\vec{AB}$

ومنه (P) هو المستوي المحوري لـ [AB]

2) $\vec{BM}=t\vec{u}$

$$\begin{cases}x=2t\\y=t+1\\z=-t-2\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

3) أ) $m(2t)-(m+2)(t+1)+(m-2)(-t-2)+3m-2=0$

$0=0$ (محققة)

ومنه المستقيم (D) محتوى في (π_m).

ب) حتى يكون (π_m) مماسي لـ (S) يجب:

$d(A;\pi_m)=AB$

$$\frac{|-m-2m-2-4m+8+3m-2|}{\sqrt{m^2+(m+2)^2+(m-2)^2}}=\sqrt{1^2+2^2}$$

$$|-3m+4|=\sqrt{5}\times\sqrt{3m^2+8}$$

$$(-3m+4)^2=5(3m^2+8)$$

$m^2+4m+4=0$ أي $(m+2)^2=0$

ومنه $m=-2$

جـ) بما أنّ $B\in(D)$ و $\vec{AB}.\vec{u}=0$

فإنّ المستقيم (D) مماسي للكرة (S)

(هناك طرق أخرى للحل)

تمرين 2:

I

$z^2-6z+13=0$

$\Delta=-16=(\pm4i)^2$

$z_1=3-2i$ و $z_2=3+2i$

$z.\bar{z}-6z-11+12i=0$

$(x+iy)(x-iy)-6(x+iy)-11+12i=0$

$x^2+y^2-6x-11+i(-6y+12)=0$

$$\begin{cases}x^2+y^2-6x-11=0 & (1)\\-6y+12=0 & (2)\end{cases}$$

من (2) $y=2$ نعوض في (1)

نجد $x_1=-1$ ، $x_2=7$

$z_3=-1+2i$ ، $z_4=7+2i$

II

1) $AD=|z_D-z_A|=|4|=4$

$BD=|z_D-z_B|=|4i|=4$

$AB=|z_B-z_A|=|4-4i|=4\sqrt{2}$

$AB^2=AD^2+BD^2$

ومنه المثلث ABD قائم ومتساوي الساقين

$BC=|z_C-z_B|=|4+4i|=4\sqrt{2}$

$AC=|z_C-z_A|=|8|=8$

$AC^2=AB^2+BC^2$

ومنه المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

متشابهان لأنهما (يحافظان على نسب المسافات). $AC=\sqrt{2}AB$ ،

$AB=\sqrt{2}BD$ و $BC=\sqrt{2}AD$

2) $|iz+2+i|=|\bar{z}-3-2i|$

$|i(z-2i+1)|=|\overline{z-3+2i}|$

$|i|\times|z+1-2i|=|z-3+2i|$

$|z - z_A| = |z - z_B|$ أي $AM = BM$

ومنه (E) هي محور القطعة $[AB]$

$$z - 1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\theta}$$

$$|z - 1| = 2\sqrt{2}$$

لتكن I منتصف $[AB]$. $z_I = 1$

$$|z - z_I| = \frac{1}{2}|z_B - z_A|$$

$$IM = \frac{1}{2} AB$$

ومنه (F) هي دائرة قطرها $[AB]$

3) أ)

$$\frac{b}{1-a} = \frac{\frac{3}{2} + i}{1 - \frac{1}{2}} = 3 + 2i = z_D$$

T تحاكي نسبته $\frac{1}{2}$ ومركزه D.

ب)

$$z_{A'} = \frac{1}{2} z_A + \frac{3}{2} + i$$

$$z_{A'} = 1 + 2i$$

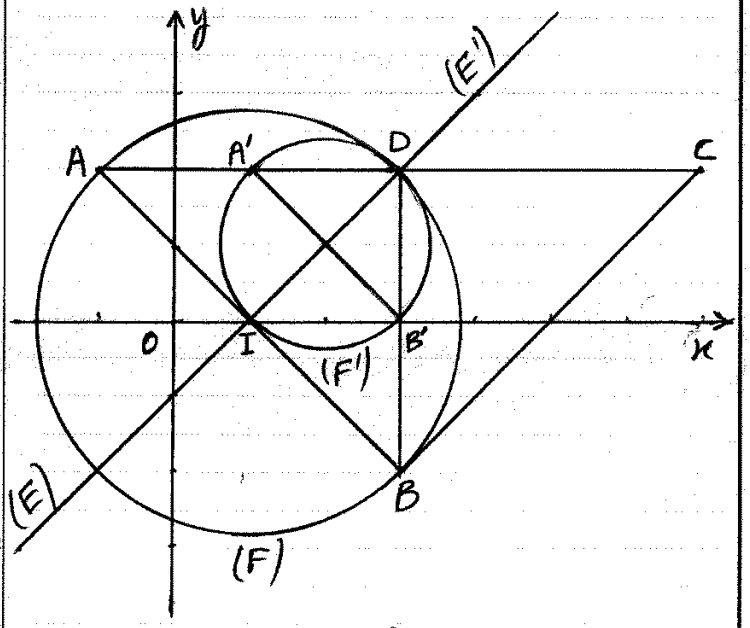
$$z_{B'} = \frac{1}{2} z_B + \frac{3}{2} + i$$

$$z_{B'} = 3$$

$T(B) = B'$ و $T(A) = A'$

(E') هي محور $[A'B']$

(F') هي دائرة قطرها $[A'B']$



تمرين 3:

1) • من أجل $n=0$: $0 \leq U_0 = 0 \leq 2$ محققة

• نفرض أن $0 \leq U_n \leq 2$ ونبرهن أنّ $0 \leq U_{n+1} \leq 2$ أي $0 \leq \sqrt{U_n + 2} \leq 2$

لدينا: $0 \leq U_n \leq 2$ أي $2 \leq U_n + 2 \leq 4$

$0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{U_n + 2} \leq \sqrt{4}$ (محققة)

ومنه $0 \leq U_n \leq 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2)

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n + 2} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(\sqrt{U_n+2} - U_n)(\sqrt{U_n+2} + U_n)}{\sqrt{U_n+2} + U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{\sqrt{U_n+2} + U_n} = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{\sqrt{U_n+2} + U_n}$$

لدينا $0 \leq U_n \leq 2$ أي $-2 \leq -U_n \leq 0$

ومنه $0 \leq -U_n + 2 \leq 2$ أي $2 - U_n \geq 0$

كذلك $U_n + 1 \geq 0$ و $\sqrt{U_n+2} + U_n \geq 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n \geq 0$ (متزايدة)

بما أن (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 ومتزايدة فهي متقاربة.

3) أ)

$$2 - U_{n+1} = 2 - \sqrt{U_n + 2}$$

$$2 - U_{n+1} = \frac{(2 - \sqrt{U_n+2})(2 + \sqrt{U_n+2})}{2 + \sqrt{U_n+2}}$$

$$2 - U_{n+1} = \frac{-U_n + 2}{2 + \sqrt{U_n+2}}$$

لدينا $\sqrt{U_n+2} \geq 0$ ومنه $2 + \sqrt{U_n+2} \geq 2$

$$\frac{1}{2 + \sqrt{U_n+2}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{2 - U_n}{2 + \sqrt{U_n+2}} \leq \frac{2 - U_n}{2}$$ (محققة)

ب) نبرهن بالتراجع:

• من أجل $n=0$: $0 \leq 2 - U_0 = 2 \leq 2$

• نفرض أن $0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ونبرهن أن: $0 \leqslant 2-U_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $0 \leqslant 2-U_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$0 \leqslant (2-U_n)\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$0 \leqslant \frac{2-U_n}{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ولدينا سابقا: $2-U_{n+1} \leqslant \frac{2-U_n}{2}$

ومنه: $2-U_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (محققة)

$$0 \leqslant 2-U_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ب) $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty}(2-U_n) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty}(2-U_n) \leqslant 0$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2-U_n)=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$ إذن

تمرين 4:

1) $f(x) = x-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-2}$

$$f(x) = x-\frac{3}{2}+\frac{e^x}{2(e^x-2)}$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\ln 2} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\ln 2} f(x)=+\infty$ (بعد الشرح)

$x=\ln 2$ ؛ $y=x-1$ ؛ $y=x-\frac{3}{2}$ (مستقيمات مقاربة)

3) $f'(x) = \frac{e^{2x}-5e^x+4}{(e^x-2)^2} = \frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$0,9$	↗	$+\infty$

4) $x \neq \ln 2$ ، كذلك $2\ln 2 - x \neq \ln 2$

$$f(2\ln 2-x)+f(x) = 2\left[\ln 2-\frac{5}{4}\right]$$

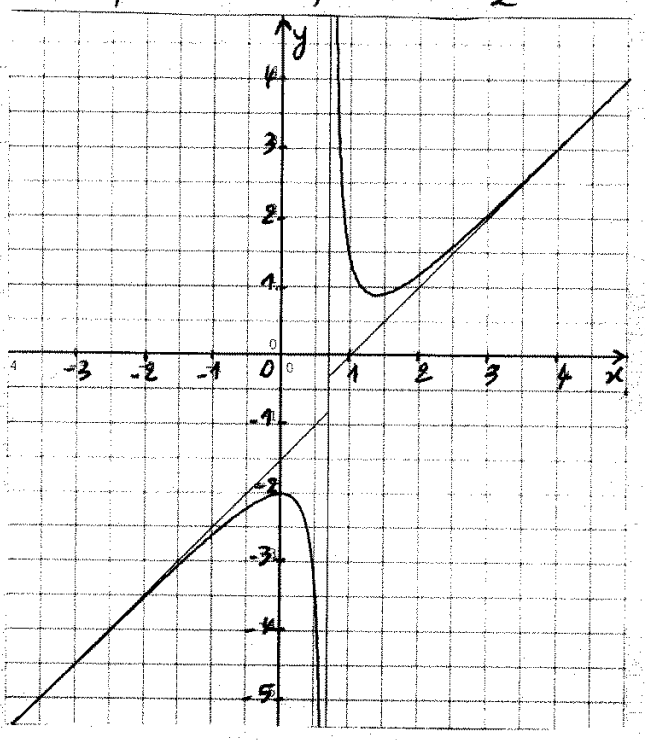
$$f(2\ln 2-x) = 2\ln 2-x-1+\frac{1}{e^{2\ln 2-x}-2}$$

$$f(2\ln 2-x) = 2\ln 2-x+\frac{1}{4e^{-x}-2}-1$$

$$f(2\ln 2-x)+f(x) = 2\ln 2-2-\frac{e^x}{2(e^x-2)}+\frac{2}{2(e^x-2)}$$

$$= 2\ln 2-2+\frac{-e^x+2}{2(e^x-2)} = 2\ln 2-2-\frac{1}{2}$$

ومنه: $f(2\ln 2-x)+f(x)=2\ln 2-\frac{5}{2}$ (محققة)



5) $f'(x)=-2$: $3e^{2x}-13e^x+12=0$

$x_1=\ln 3$ ، $x_2=\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

$y_1=-2x+3\ln 3$ ؛ $y_2=-2x+3\ln\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{5}{2}$

6) $-2<\frac{m}{2}<-\frac{3}{2}$ إذن $-4<m<-3$

7) $A(\lambda)=\int_\lambda^0 (y-f(x))\,dx$

$$A(\lambda)=\int_\lambda^0 \frac{-e^x}{2(e^x-2)}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|e^x-2|\right]_\lambda^0$$

$$A(\lambda)=\frac{1}{2}\ln|e^\lambda-2|\ ua$$

$$A(\lambda)=2\ln(2-e^\lambda)\ cm^2$$

$\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=2\ln 2\,cm^2$ و $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} e^\lambda=0$

"عبد المطلب"