المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي ع.ت و ت.ر المادة: رياضيات	**فـرض** **الفصل الثالث**	الموسم الدراسي: 2015/2014 المدة: ساعاتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (6نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+3}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنّها متقاربة.

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\dfrac{2}{3^{n+1}-1}$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $v_n=\dfrac{u_n}{u_n+2}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$ ، ثم احسب حدها الأول v_0.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

5) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $w_n=e^{av_n}$ $(a\in\mathbb{R}^*)$ و $P_n=w_0\times w_1\times...\times w_n$.

احسب P_n بدلالة a و n، ثم عيّن العدد الحقيقي a بحيث تكون $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\sqrt{3}$.

تمرين2 (5نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_1=0$ و $u_{n+1}=u_n+2^{n-1}$.

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ ، ثم احسب حدها الأول v_1.

2) احسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_1+v_2+...+v_n$.

3) بيّن أنّ $u_{n+1}=S_n$ وأنّ $u_n=v_n-1$ ، ثم احسب نهاية u_n لما $n\to+\infty$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع $w_n=\ln(2v_n)$.

أ) برهن أنّ (w_n) متتالية حسابية، يطلب حساب أساسها r وحدها الأول w_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S'_n=w_1+w_2+...+w_n$.

ج) حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة $e^{S'_n}=2^{2016}$.

تمرين3 (9نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-2\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2-4x-5+6\ln(x+2)$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، وبيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-2$.

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2{,}3<\alpha<2{,}4$.

4) احسب $f(0)$ ، $f(3)$ و $f(4)$ ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول 1cm)

5) برهن على وجود مماسين للمنحني $(\mathscr{C})$ يكون معامل توجيه كل منهما يساوي 1- . (لا يطلب كتابة معادلتيهما)

6) m وسيط حقيقي موجب تماما. عيّن بيانيا قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=\ln m-8$ ثلاثة حلول متمايزة.

7) احسب الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على المجال $]-2\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x+2)\ln(x+2)-x$

- استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-2\,;+\infty[$.

- احسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$، محور الفواصل، والمستقيمين $x=-1$ و $x=1$.

8) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$-{-2} بـ: $h(x)=(x+2)^2-8|x+2|+7+3\ln(x+2)^2$

- أثبت أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=-2$ محور تناظر للمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h.

- أثبت أنّ $h(x)=f(x)$ على المجال $]-2\,;+\infty[$.

- اشرح كيفية إنشاء المنحني $(\mathscr{C}')$ ، ثم ارسمه في المعلم السابق.

تصحيح الفرض للفصل الثالث 2012

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) * $n=0$: $U_0 = 1 > 0$ (محققة)

* نفرض أن $U_n > 0$ ونبرهن صحة $U_{n+1} > 0$

أي $\frac{U_n}{U_n+3} > 0$.

لدينا $U_n > 0$ و $U_n + 3 > 0$ ومنه $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+3} > 0$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}$ فإن $U_n > 0$.

2) $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{U_n+3} - U_n = \frac{-U_n(U_n+2)}{U_n+3} < 0$

لأن $U_n > 0$ و $U_n + 2 > 0$ و $U_n + 3 > 0$.

ومنه (U_n) متناقصة تماما .

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

3) * $n=0$: $U_0 = \frac{2}{3-1} = 1$ (محققة)

* نفرض أن $U_n = \frac{2}{3^{n+1}-1}$ ونبرهن $U_{n+1} = \frac{2}{3^{n+2}-1}$

لدينا : $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+3} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}-1}}{\frac{2}{3^{n+1}-1}+3}$

$U_{n+1} = \frac{2}{3.3^{n+1}-3+2} = \frac{2}{3^{n+2}-1}$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}$ فإن $U_n = \frac{2}{3^{n+1}-1}$

4) أ) $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+1}+2} = \frac{\frac{U_n}{U_n+3}}{\frac{U_n}{U_n+3}+2}$

$V_{n+1} = \frac{U_n}{3U_n+6} = \frac{1}{3}\left(\frac{U_n}{U_n+2}\right) = \frac{1}{3}V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية : $q = \frac{1}{3}$ و $V_0 = \frac{1}{3}$.

ب) $S_n = V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$

$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - 3^{-n-1}\right)$

5) $P_n = e^{aV_0} \times e^{aV_1} \times \dots \times e^{aV_n}$

$P_n = e^{a(V_0+V_1+\dots+V_n)} = e^{aS_n}$

$P_n = e^{\frac{a}{2}(1-3^{-n-1})}$

$\lim_{n\to+\infty} P_n = e^{\frac{a}{2}}$ لأن $\lim_{n\to+\infty} 3^{-n-1} = 0$

$e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$ أي $\frac{a}{2} = \ln\sqrt{3}$ ومنه $a = \ln 3$

تمرين 2:

1) $V_n = U_{n+1} - U_n = U_n + 2^{n-1} - U_n$

$V_n = 2^{n-1} = 1 \times 2^{n-1}$

من الشكل $V_1 \times q^{n-1}$ ومنه $q = 2$ و $V_1 = 1$

2) $S_n = V_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$

3) $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

$S_n = \cancel{U_2} - U_1 + \cancel{U_3} - \cancel{U_2} + \dots + U_{n+1} - \cancel{U_n} =$

$S_n = U_{n+1} - U_1 = U_{n+1}$

$U_n = U_{n+1} - 2^{n-1} = 2^n - 1 - 2^{n-1} = 2^{n-1} - 1$

ومنه $U_n = V_n - 1$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}(2^{n-1} - 1) = +\infty$

4) أ) $W_n = \ln(2V_n) = \ln 2^n = n\ln 2$

$W_{n+1} - W_n = \ln 2$

ومنه (W_n) متتالية حسابية : $r = \ln 2$ و $W_1 = \ln 2$

ب) $S'_n = \frac{n}{2}(W_1 + W_n) = \frac{\ln 2}{2} n(n+1)$

ج) $e^{S'_n} = 2^{2016}$ أي $S'_n = \ln 2^{2016}$

$\frac{\ln 2}{2} n(n+1) = 2016 \ln 2$

$n^2 + n - 4032 = 0$

ومنه $n = 63$

تمرين 3:

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x(x-4)-5+6\ln(x+2)\right] = +\infty$

$\lim_{x\overset{>}{\to}-2} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\overset{>}{\to}-2} \ln(x+2) = -\infty$

ومنه $x=-2$ مستقيم مقارب لـ (C).

2) $f'(x) = 2x-4+\frac{6}{x+2} = \frac{2(x^2-1)}{x+2}$

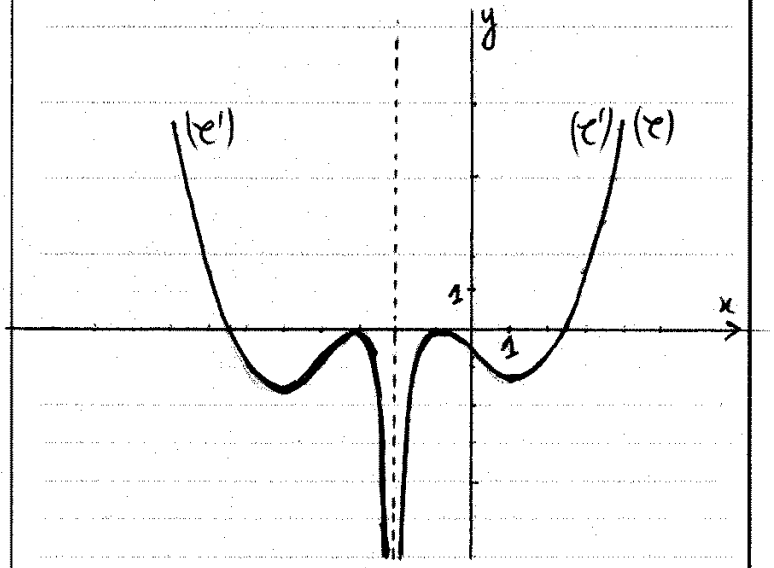
إشارة $f'(x)$ من إشارة (x^2-1)

x	-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-8+6\ln3 \simeq -1,4$	$\nearrow$	$+\infty$

3) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,+\infty[$ و $f(2,3)\simeq -0,16<0$ و $f(2,4)\simeq 0,05>0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا: $2,3<\alpha<2,4$

4) $f(0)=-0,84$. $f(3)\simeq 1,66$ و $f(4)\simeq 5,75$



5) $f'(x_0)=-1$ أي $\frac{2(x_0^2-1)}{x_0+2}=-1$

$2x_0^2+x_0=0$ ومنه $x_0=0$ ؛ $x_0=-\frac{1}{2}$

ومنه يوجد مماسين حيث الميل -1.

6) $-8+6\ln3 < \ln m - 8 < 0$

$6\ln3 < \ln m < 8$

$3^6 < m < e^8$

7) $g'(x) = \ln(x+2)$

$F(x) = \frac{x^3}{3}-2x^2-5x+6\left[(x+2)\ln(x+2)-x\right]+C$

$F(x) = \frac{x^3}{3}-2x^2-11x+6(x+2)\ln(x+2)+C$

$A = \int_{-1}^{1} -f(x)\,dx =$

$\left[\frac{-x^3}{3}+2x^2+11x-6(x+2)\ln(x+2)\right]_{-1}^{1}$

$A = \left(\frac{64}{3}-18\ln3\right) u.a \simeq 1,56\ cm^2$

8) من أجل كل $x\neq-2$ وكذلك $-4-x\neq-2$

لنبرهن أن: $h(-4-x) = h(x)$

$h(-4-x) = (-x-2)^2-8|-x-2|+7+3\ln(-x-2)^2$

$h(-4-x) = (x+2)^2-8|x+2|+7+3\ln(x+2)^2$

$h(-4-x) = h(x)$

ومنه $x=-2$ محور تناظر لـ (C').

* لما $x>-2$: $|x+2| = x+2$

$h(x) = x^2+4x+4-8(x+2)+7+3\ln(x+2)^2$

$h(x) = x^2-4x-5+6\ln(x+2) = f(x)$

* لما $x>-2$: $h(x)=f(x)$ ومنه (C') يطابق (C)

ولما $x<-2$: بما أن (C') يقبل كمحور تناظر $x=-2$ ومنه نناظر الجزء المطابق بالنسبة للمستقيم $x=-2$.

"عبد المطلب"