الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الأول**	الموسم الدراسي: 2016/2015م المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (10نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{(x-2)e^x-x}{2(e^x-1)}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول 2cm.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\neq 0$ فإنّ $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=\dfrac{x}{2}$.

ج) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\neq 0$ فإنّ $f(x)=\dfrac{x}{2}-1-\dfrac{1}{e^x-1}$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ') معادلته $y=\dfrac{x}{2}-1$.

ج) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$. فسّر النتيجة هندسيا.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x\neq 0$ فإنّ $f'(x)>0$. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) أثبت أنّ النقطة $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$.

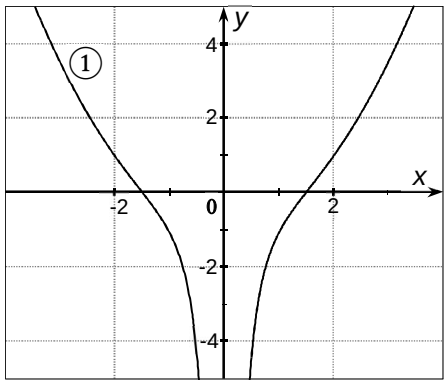
ج) اكتب معادلتي المماسين للمنحني $(\mathscr{C})$ بحيث يكون معامل توجيه كل منهما يساوي $\dfrac{5}{2}$.

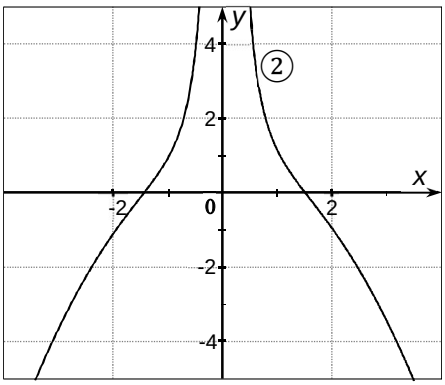
4) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β في $\mathbb{R}^*$ حيث $-1{,}1<\alpha<-1$ و $2{,}2<\beta<2{,}3$.

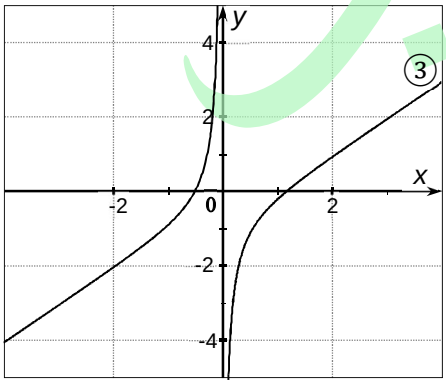
ب) ارسم المستقيمين المقاربين (Δ) و (Δ') والمنحني $(\mathscr{C})$.

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\dfrac{e^x}{e^x-1}+\dfrac{m}{2}=0$.

5) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=f(x^2)$. من بين المنحنيات الثلاثة: ①، ② و ③، المبيّنة أسفله، عيّن المنحني الممثّل للدالة g. علّل اختيارك وذلك بدراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}^*$ (يمكن استعمال مشتقة دالة مركبة).







تمرين2 (10نقاط)

I- a وb عددان حقيقيان، ولتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2+a+bx\sqrt{x^2+5}$.

تعطى تغيّرات الدالة g في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$				$-$			
$g(x)$		↘	5	↘	-3	↘	

1) باستغلال الجدول بيّن أنّ $a=5$ و $b=-2$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0\,;2]$.

3) تحقّق أنّ $1{,}28<\alpha<1{,}30$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+6-2\sqrt{x^2+5}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول 1cm.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2+5}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x-6\right)=0$ و أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x-6\right)=0$. استنتج أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين، أحدهما (Δ) بجوار $(-\infty)$ والآخر (Δ') بجوار $(+\infty)$.

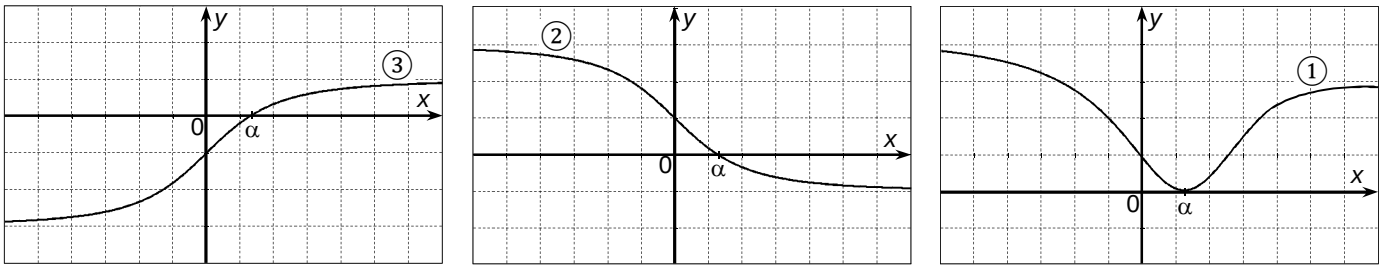
4) احسب $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(5)$ و $f(6)$ ثم بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين x_1 و x_2 حيث x_1 الحل السالب و x_2 الحل الموجب، يطلب إعطاء حصرا لكل منهما بين عددين صحيحين متتابعين.

5) بيّن أنّ $\sqrt{\alpha^2+5}=2\alpha$ وأنّ $f(\alpha)=-3\alpha+6$.

6) (T) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة A معادلته $7x-3y+8=0$. عيّن إحداثيتي النقطة A.

7) احسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين (Δ) و (Δ') والمنحني $(\mathscr{C})$. نأخذ $f(\alpha)\approx 2{,}1$.

8) من بين المنحنيات ① ، ② و ③ المبيّنة أسفله، عيّن المنحني الممثل للدالة f' مع التعليل.



تصحيح الامتحان للفصل 1 : (2015)

تمرين 1:

1) أ) $f(x)=\frac{xe^x-2e^x-x}{2(e^x-1)}=\frac{x(e^x-1)}{2(e^x-1)}-\frac{2e^x}{2(e^x-1)}$

ومنه : $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{e^x}{e^x-1}$

ب) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=0\end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}-\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)=0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

ج) ندرس إشارة $f(x)-y=-\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)$

$+ \quad 0 \quad -$

لما $x>0$: $f(x)-y<0$، منه (C) تحت (Δ).

ولما $x<0$: $f(x)-y>0$، منه (C) فوق (Δ)

2) أ) $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{x}{2}-1+1-\frac{e^x}{e^x-1}$

$f(x)=\frac{x}{2}-1+\frac{e^x-1-e^x}{e^x-1}=\frac{x}{2}-1-\frac{1}{e^x-1}$

ب) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=0\end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x-1}=0$

ومنه (Δ') مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

ج) $\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$

(مستقيم مقارب معادلته $x=0$)

3) أ) $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}>0$ $(x\neq0)$

ومنه f متزايدة تماما من أجل $x\neq0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

ب) $(0;-\frac{1}{2})$ مركز تناظر : من أجل $x\neq0$ و $-x\neq0$:

$f(2(0)-x)+f(x)=\left(\frac{-x}{2}-\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{e^x}{e^x-1}\right)$

$=-\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}\right)\times\frac{e^x}{e^x}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{-1}{1-e^x}-\frac{e^x}{e^x-1}$

$f(-x)+f(x)=\frac{1-e^x}{e^x-1}=-1=2\left(\frac{-1}{2}\right)$

ج) $f'(x_0)=\frac{5}{2}$ أي $\frac{1}{2}+\frac{e^{x_0}}{(e^{x_0}-1)^2}=\frac{5}{2}$

$(X=e^{x_0})$: $2e^{2x_0}-5e^{x_0}+2=0$; $2X^2-5X+2=0$

$X_1=\frac{1}{2}$ و $X_2=2$ ومنه $x_1=-\ln2$ و $x_2=\ln2$

$y_1=\frac{5}{2}x+2\ln2+1$ و $y_2=\frac{5}{2}x-2\ln2-2$

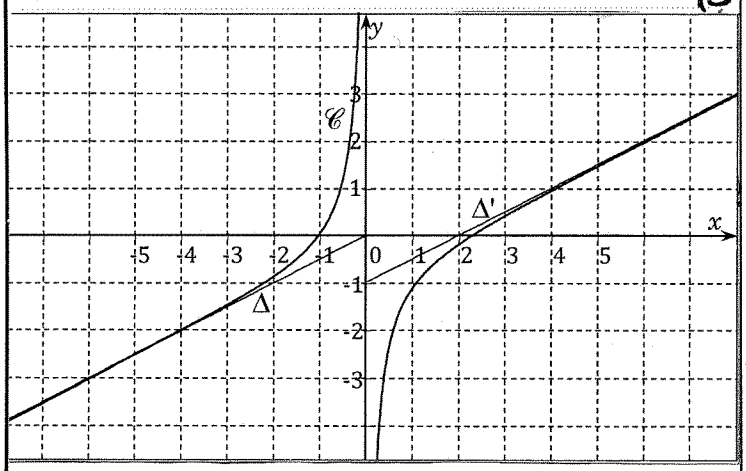
4) أ) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1,1;-1[$

$f(-1,1)=-0,05<0$ و $f(-1)=0,08>0$، ومنه

$f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α (مبرهنة القيم المتوسطة)

كذلك : $f(2,2)=-0,02<0$ و $f(2,3)=0,04>0$...

ب)



ج) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{m}{2}$ فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ).

$\frac{m}{2}<-1$ $(m<-2)$: حل وحيد موجب.

$-1\leq\frac{m}{2}\leq0$ $(-2\leq m\leq0)$: لا يوجد حلول.

$\frac{m}{2}>0$ $(m>0)$: حل وحيد سالب.

5) $g'(x)=2xf'(x^2)=2x\left[\frac{1}{2}+\frac{e^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}\right]$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x$. $- \quad 0 \quad +$

g متزايدة لما $x>0$ و g متناقصة لما $x<0$.

المنحني المناسب هو المنحني ①.

تمرين 2:

I 1) $g(0)=5$ و $g(2)=-3$

نجد: $g(x)=x^2+5-2x\sqrt{x^2+5}$

2) g مستمرة ومتناقصة تماما على $[0;2]$ و $g(0)\times g(2)<0$ ، منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

3) $g(1,28)=0,04>0$ و $g(1,3)=-0,03<0$ ...

لإشارة $g(x)$:

		α	
	$+$	0	$-$

4) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+5)+\lim_{x\to-\infty}(-2x\sqrt{x^2+5})=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-2\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)+5=-\infty$

II 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+6)+\lim_{x\to-\infty}(-2\sqrt{x^2+5})=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-2\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)+6=-\infty$

2) $f'(x)=1-2\times\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}=\frac{\sqrt{x^2+5}-2x}{\sqrt{x^2+5}}$

$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-2x}{\sqrt{x^2+5}}\times\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}}=\frac{g(x)}{x^2+5}$

$x<\alpha$ (f متزايدة تماما) ، $x>\alpha$ (f متناقصة تماما)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(3x+6)]=\lim_{x\to-\infty}-2(x+\sqrt{x^2+5})$

$=\lim_{x\to-\infty}-2\left[\frac{(x+\sqrt{x^2+5})(x-\sqrt{x^2+5})}{x-\sqrt{x^2+5}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{+10}{x-\sqrt{x^2+5}}=0$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+6)]=\lim_{x\to+\infty}2(x-\sqrt{x^2+5})$

$=\lim_{x\to+\infty}2\left[\frac{(x-\sqrt{x^2+5})(x+\sqrt{x^2+5})}{x+\sqrt{x^2+5}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10}{x+\sqrt{x^2+5}}=0$

(Δ) $y_1=3x+6$ بجوار $(-\infty)$ و (Δ') $y_2=-x+6$ بجوار $(+\infty)$

4) $f(-2)=-2<0$ و $f(-1)=0,1>0$

f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-2;-1]$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد حل وحيد x_1 حيث: $-2<x_1<-1$

$f(5)=0,05>0$ و $f(6)=-0,8<0$: $5<x_2<6$

5) لدينا $g(\alpha)=0$ أي $\alpha^2+5-2\alpha\sqrt{\alpha^2+5}=0$

$\frac{\alpha^2+5}{\sqrt{\alpha^2+5}}=2\alpha\frac{\sqrt{\alpha^2+5}}{\sqrt{\alpha^2+5}}$ ومنه $\sqrt{\alpha^2+5}=2\alpha$

$f(\alpha)=\alpha+6-2\sqrt{\alpha^2+5}=\alpha+6-2(2\alpha)=-3\alpha+6$

6) $(T): y=\frac{7}{3}x+\frac{8}{3}$ منه $f'(x_0)=\frac{7}{3}$

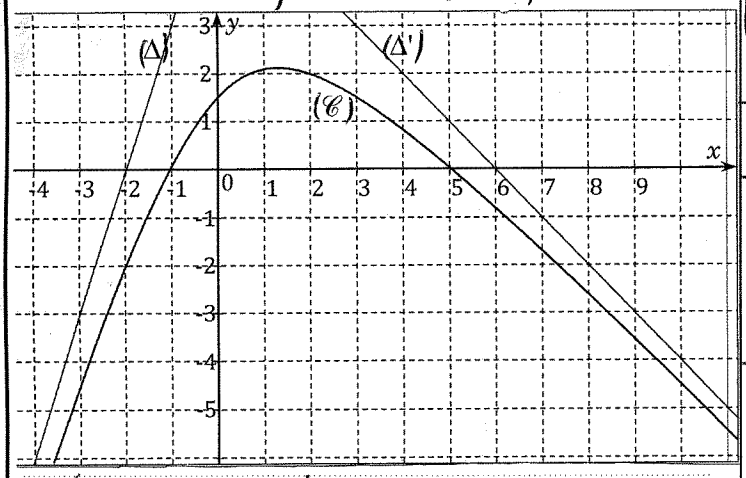
$1-\frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2+5}}=\frac{7}{3}$ أي $\frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2+5}}=\frac{-4}{3}$

$2\sqrt{x_0^2+5}=-3x_0$ ($-3x_0>0$ أي $x_0<0$)

$4(x_0^2+5)=9x_0^2$ ومنه $x_0^2=4$

في الأخير: $x_0=-2$ ومنه $A(-2;-2)$

7) $f(0)=1,53$ و $f(2)=2$.



8) لما $x<\alpha$: $f'(x)>0$

$f'(\alpha)=0$

ولما $x>\alpha$: $f'(x)<0$

ومنه المنحني الموافق هو المنحني ②

"عبد المطلب"