الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2015/2016م المدة: ثلاث ساعات (3سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين 1 (4نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_1=3$ و $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n>2$. (لاحظ أنّ $u_{n+1}=3-\dfrac{5}{u_n+3}$)

2) بيّن أنّ $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(2+u_n)(2-u_n)}{u_n+3}$. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما وأنّها متقاربة.

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n=2\left(\dfrac{5^n+1}{5^n-1}\right)$ ، ثم احسب نهاية u_n لما $n\to+\infty$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-2}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_{n+1}-5v_n=0$. استنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع: $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$. بيّن أنّ $S_n=\dfrac{5(5^n-1)}{4}$.

5) من أجل كل عدد $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع $w_n=e^{2v_n}$ و $P_n=w_1\times w_2\times\ldots\times w_n$. بيّن أنّ $P_n=\sqrt{e^{5(5^n-1)}}$

تمرين 2 (5نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B ، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=\sqrt{3}+3i$ ، $z_C=3\sqrt{3}-3i$ و $z_D=-2i$.

1) اكتب z_A ، z_B ، z_C ، z_D و $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)$ على الشكل الأسي. استنتج طبيعة المثلث OAB.

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n الذي من أجله يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا ثم بيّن أنّ $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{2016}=1$.

3) بيّن أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها D، يطلب تعيين نصف قطرها r.

4) أ) بيّن أنّ النقطة D هي مرجح للجملة $\{(A,8);(B,-7);(C,5)\}$.

ب) عيّن العدد الحقيقي k بحيث تكون $(\mathscr{C})$ هي مجموعة النقط التي تحقق: $\left\|8\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\right\|=k$.

5) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة E ذات اللاحقة $z_E=-\sqrt{3}+i$ ، نسبته 2 وزاويته $-\dfrac{\pi}{3}$.

أ) بيّن أنّ الكتابة المركبة للتشابه S هي: $z'=(1-\sqrt{3}i)z-\sqrt{3}-3i$.

ب) بيّن أنّ صورة النقطة A هي B وصورة النقطة B هي C بالتشابه S .

ج) عيّن $z_{D'}$ لاحقة النقطة D' بحيث $S(D)=D'$ ، استنتج خصائص المجموعة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بالتشابه S .

د) بيّن أنّ النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة $(\mathscr{C}')$.

تمرين3 (4نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(2;2;-1)$ ، $B(4;4;5)$ ، $C(3;3;2)$ و $D(-4;7;3)$. $\mathscr{P}_1$ و $\mathscr{P}_2$ مستويين معادلتهما على الترتيب $x+z+1=0$ و $y+2z-13=0$.

$\mathscr{D}$ المستقيم المعرّف بتمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=-5+t \\ y=5+2t \\ z=4-t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

1) أ) بيّن أنّ المستويين $\mathscr{P}_1$ و $\mathscr{P}_2$ يتقاطعان وفق المستقيم $\mathscr{D}$.

ب) عيّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقّق $(x+z+1)^2+(y+2z-13)^2=0$.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم $\mathscr{D}$ محتوى في المستوي $\mathscr{P}_3$ ذي المعادلة $x+y+3z-12=0$.

ب) عيّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقّق $(x+y+3z-11)^2-(x+y+3z-13)^2=0$.

3) أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

ب) بيّن أنّ المستقيمين (AB) و $\mathscr{D}$ غير متوازيان ولا يتقاطعان.

4) أ) بيّن أنّ النقطة C تنتمي إلى المستقيم (AB) وأنّ النقطة D تنتمي إلى المستقيم $\mathscr{D}$.

ب) بيّن أنّ المستقيم (CD) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و $\mathscr{D}$. استنتج المسافة بين (AB) و $\mathscr{D}$.

5) عيّن المركز Ω ونصف القطر r، لأصغر سطح كرة مماسية لكل من المستقيمين (AB) و $\mathscr{D}$.

تمرين4 (7نقاط)

I- لتكن g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;3[$ كما يلي: $g(x)=-x^2+6x-8-\ln(3-x)$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

2) احسب $g'(x)$ ، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) احسب $g(2)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;3[$.

II- لتكن f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;3[$ كما يلي: $f(x)=-x+2+\dfrac{\ln(3-x)}{x-3}$.

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) بيّن أنّه من أجل كل $x<3$ فإنّ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-3)^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا $(\mathscr{D})$ معادلته $y=-x+2$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{D})$.

4) ليكن (Δ) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند نقطة فاصلتها x_0 معادلته $y=-x+2-\dfrac{1}{e}$. احسب x_0.

5) ارسم المستقيم المقارب $(\mathscr{D})$ ، المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

6) استعمل المنحني $(\mathscr{C})$ لتعيين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=-x+m$ حلين متمايزين.

7) لتكن h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-3;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x+2-\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h هو صورة المنحني $(\mathscr{C})$ بتحويل بسيط يطلب تعيينه ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C}')$.

تصحيح الاختبار للفصل 2: 2016

تمرين 1:

1) من أجل $n=1$: $U_1 = 3 > 2$ (محققة)

نفرض أن $U_n > 2$ ونبرهن صحة $U_{n+1} > 2$

أي $\left(3 - \frac{5}{U_n+3}\right) > 2$

لدينا $U_n > 2$ منه $U_n + 3 > 5$

$\frac{1}{U_n+3} < \frac{1}{5}$ منه $\frac{-5}{U_n+3} > \frac{-5}{5}$

$3 - \frac{5}{U_n+3} > -1+3$ أي $U_{n+1} > 2$ (محققة)

في الأخير $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n > 2$

2)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n+4}{U_n+3} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2+4}{U_n+3} = \frac{(2+U_n)(2-U_n)}{U_n+3}$$

بما أن $U_n > 2$ منه $U_n + 2 > 0$

كذلك $U_n + 3 > 0$ ولدينا $-U_n < -2$

أي $2 - U_n < 0$ ومنه $U_{n+1} - U_n < 0$

(U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل، فهي متقاربة.

3) من أجل $n=1$: $U_1 = 2\left(\frac{5^1+1}{5^1-1}\right) = 3$

نفرض أن $U_n = 2\left(\frac{5^n+1}{5^n-1}\right)$ ونبرهن صحة: $U_{n+1} = 2\left(\frac{5^{n+1}+1}{5^{n+1}-1}\right)$

$$U_{n+1} = \frac{3U_n+4}{U_n+3} = \frac{6\left(\frac{5^n+1}{5^n-1}\right)+4}{2\left(\frac{5^n+1}{5^n-1}\right)+3}$$

$$U_{n+1} = \frac{10\times 5^n+2}{5\times 5^n-1} = \frac{2\times 5^{n+1}+2}{5^{n+1}-1} = 2\left(\frac{5^{n+1}+1}{5^{n+1}-1}\right)$$

(محققة) إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (U_n) محققة.

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1+5^{-n}}{1-5^{-n}}\right) = 2$$

4) أ)

$$V_{n+1} - 5V_n = \frac{U_{n+1}+2}{U_{n+1}-2} - 5\left(\frac{U_n+2}{U_n-2}\right)$$

$$V_{n+1} - 5V_n = \frac{\frac{3U_n+4}{U_n+3}+2}{\frac{3U_n+4}{U_n+3}-2} - \frac{5U_n+10}{U_n-2}$$

$$V_{n+1} - 5V_n = \frac{5U_n+10}{U_n-2} - \frac{5U_n+10}{U_n-2} = 0$$

$V_{n+1} = 5V_n$ ومنه (V_n) متتالية هندسية

أساسها $q=5$ وحدها الأول $V_1 = \frac{U_1+2}{U_1-2} = 5$

ب) $S_n = V_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right) = 5\left(\frac{5^n-1}{4}\right)$

5)

$$P_n = e^{2V_1} \times e^{2V_2} \times \dots \times e^{2V_n} = e^{2V_1+2V_2+\dots+2V_n}$$

$$P_n = e^{2(V_1+V_2+\dots+V_n)} = e^{2S_n}$$

$$P_n = e^{\frac{5(5^n-1)}{2}} = \sqrt{e^{5(5^n-1)}}$$

تمرين 2:

1) $Z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $Z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$; $Z_C = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$Z_D = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$; $\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}{2\sqrt{3}e^{i(\pi/3)}} = e^{i\pi/3}$

$\left|\frac{Z_A}{Z_B}\right| = \frac{OA}{OB} = 1$; $\arg\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right) = (\vec{OB};\vec{OA}) = \frac{\pi}{3}$

ومنه OAB مثلث متقايس الأضلاع.

2)

$$\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$$

$\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n$ حقيقي إذا كان $\frac{n\pi}{3} = k\pi$

ومنه $n = 3k$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^{2016} = e^{i\frac{2016\pi}{3}} = e^{i672\pi} = e^{i0} = 1$$

3) $|Z_D - Z_A| = |-\sqrt{3}-5i| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$|z_D - z_B| = |\sqrt{3} - 5i| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$|z_D - z_C| = |3\sqrt{3} + i| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$AD = BD = CD = 2\sqrt{7} = r$

ومنه A ، B و C تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$.

4) أ) $z_D = \dfrac{8z_A - 7z_B + 5z_C}{8-7+5} = \dfrac{-12i}{6} = -2i$

ب) $\|8\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\| =$

$\|8\overrightarrow{MD} + 8\overrightarrow{DA} - 7\overrightarrow{MD} - 7\overrightarrow{DB} + 5\overrightarrow{MD} + 5\overrightarrow{DC}\| =$

$\|6\overrightarrow{MD} + \underbrace{8\overrightarrow{DA} - 7\overrightarrow{DB} + 5\overrightarrow{DC}}_{\vec{0}}\| = 6MD$

$6MD = k$ أي $MD = \dfrac{k}{6}$

حتى تكون مجموعة النقط هي $(\mathcal{C})$:

$\dfrac{k}{6} = 2\sqrt{7}$ و منه $k = 12\sqrt{7}$

5) أ) $z' = az + b$

$a = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i$

$\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{b}{\sqrt{3}i} = -\sqrt{3} + i$

ومنه $b = -\sqrt{3} - 3i$ أو $z' - z_E = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z - z_E)$

ب) $z_B = (1-\sqrt{3}i)z_A - \sqrt{3} - 3i = \sqrt{3} + 3i$

$z_C = (1-\sqrt{3}i)z_B - \sqrt{3} - 3i = 3\sqrt{3} - 3i$

ج) $z_{D'} = (1-\sqrt{3}i)z_D - \sqrt{3} - 3i = -3\sqrt{3} - 5i$

$(\mathcal{C}')$ هي الدائرة التي مركزها D'

ونصف قطرها $r' = 2r = 4\sqrt{7}$

د) $|z_{D'} - z_B| = |-4\sqrt{3} - 8i| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$

$|z_{D'} - z_C| = |-6\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$

$D'B = D'C$

ومنه B و C تنتميان إلى $(\mathcal{C}')$

(خصائص التشابه المباشر)

تمرين 3:

1) أ) $\mathcal{D}$ محتوى في P_1 و P_2.

$P_1 : x + z + 1 = 0$

(محققة) $(-5+t) + (4-t) + 1 = 0$

$P_2 : y + 2z - 13 = 0$

(محققة) $(5+2t) + 2(4-t) - 13 = 0$

ب) $x + z + 1 = 0$ و $y + 2z - 13 = 0$

حلول هذه الجملة هي تقاطع P_1 و P_2.

2) أ) $P_3 : x + y + 3z - 12 = 0$

(محققة) $(-5+t) + (5+2t) + 3(4-t) - 12 = 0$

ب) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(x+y+3z-11)^2 - (x+y+3z-13)^2 =$

$2(2x + 2y + 6z - 24) =$

$(P_3) \ldots 4(x + y + 3z - 12) = 0$

3) أ) $(\alpha \in \mathbb{R})$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$

$\begin{pmatrix}x-2\\y-2\\z+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha\\2\alpha\\6\alpha\end{pmatrix}$

$(t' \in \mathbb{R})$

$\begin{cases} x = 2\alpha + 2 \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = 6\alpha - 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = t' + 2 \\ y = t' + 2 \\ z = 3t' - 1 \end{cases}$

ب) ليكن $\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه $\mathcal{D}$

$\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطيا،

إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي

$\begin{cases} -5 + t = t' + 2 & (1) \\ 5 + 2t = t' + 2 & (2) \\ 4 - t = 3t' - 1 & (3) \end{cases}$

من (1) و (2) $t = -10$ و $t' = -17$

نعوضهما في (3): $14 = -52$ (مستحيل)

ومنه (AB) و $\mathcal{D}$ لا يتقاطعان.

4) أ) لاحظ أن منتصف [AB] هي C

و $\begin{cases} x_D = -5+t \\ y_D = 5+2t \\ z_D = 4-t \end{cases}$ نجد $t=1$ (محققة)

ب) $\vec{CD}\begin{pmatrix}-7\\4\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{CD}\cdot\vec{AB}=0$ ، $\vec{CD}\cdot\vec{u}=0$

$d((AB);D) = CD = \sqrt{66}$

5) Ω هي منتصف [CD] ،

$\Omega\left(-\frac{1}{2};5;\frac{5}{2}\right)$ و $r=\frac{CD}{2}=\frac{\sqrt{66}}{2}$

تمرين 4:

I-1) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} g(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} \ln(3-x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^2+6x-8-\ln(3-x)\right] = -\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(3-x)=+\infty$

2) $g'(x) = -2x+6+\frac{1}{3-x} = \frac{2x^2-12x+19}{3-x}$

$2x^2-12x+19>0$ $(\Delta<0)$ و $3-x>0$ منه $g'(x)>0$

x	$-\infty$		2		3
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

3) $g(2)=0$ منه إشارة $g(x)$: $- \overset{2}{0} +$

II-1) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = +\infty$ ($x=3$ مستقيم مقارب لـ (C))

لأن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3}(x-3)=0$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3}\ln(3-x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(3-x)}{x-3}=0$

بوضع $(X=3-x)$ $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{-X}=0$

2) $f'(x) = -1+\frac{1-\ln(3-x)}{(x-3)^2} = \frac{-x^2+6x-8-\ln(3-x)}{(x-3)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(3-x)}{x-3}=0$

لدراسة الوضعية ندرس إشارة $\frac{\ln(3-x)}{x-3}$

$\ln(3-x)>0$ لأن $3-x>1$ أي $x<2$

x	$-\infty$		2		3
$\ln(3-x)$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$		$-$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

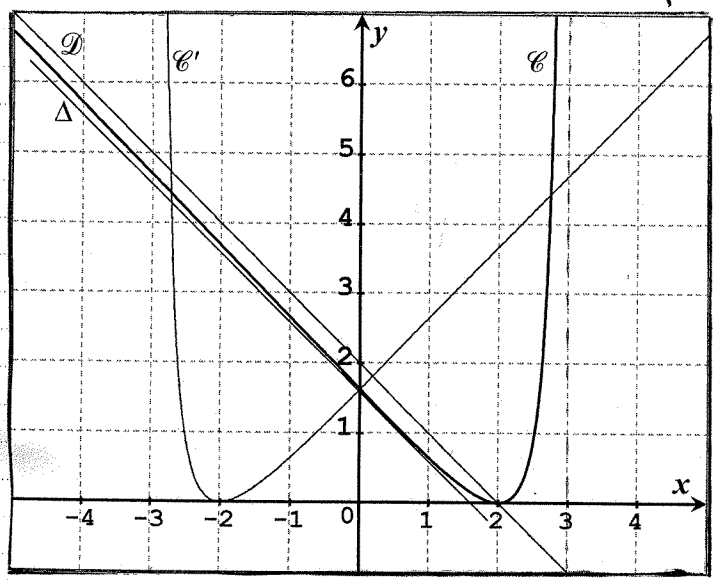
$x<2$: (C) تحت D ، $2<x<3$: (C) فوق D

(C) يقطع D عند $(2,0)$

4) $f'(x_0)=-1$ أي $\frac{-x_0^2+6x_0-8-\ln(3-x_0)}{(x_0-3)^2}=-1$

$\ln(3-x_0)=1$ أي $3-x_0=e$ منه $x_0=3-e$

5)



6) حلول $f(x)=-x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات التي ميلها -1.

حلين متمايزين: $2-\frac{1}{e}<m<2$

7) $h(x)=f(-x)$

التحويل هو تناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

"عبد المطلب"