الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**الفرض الثاني للفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2016/2015م المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (07نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A، B، و C لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3$ ، $z_B=-1+2i$ و $z_C=-3-2i$.

1) أ) بيّن أنّ $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$. استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) بيّن أنّ النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة $(\mathscr{C})$ التي يطلب تعيين مركزها I ونصف قطرها r.

2) أ) بيّن أنّ $\frac{1+z_C}{1+z_B}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

ب) بيّن أنّ العدد $\left(\frac{1+z_C}{1+z_B}\right)^{2016}$ حقيقي، وأنّ العدد $\left(\frac{1+z_C}{1+z_B}\right)^{1962}$ تخيلي صرف.

3) T التحويل الذي يحوّل كل نقطة M لاحقتها z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z+3\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

أ) عيّن الطبيعة الهندسية والعناصر المميّزة للتحويل T.

ب) لتكن النقطة D صورة النقطة B بالتحويل T. أنشئ النقطة D، ثم بيّن أنّ $z_D=1-4i$.

ج) عيّن طبيعة الرباعي ABCD ثم مثّله.

د) عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون النقطة D مرجحا للجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,1)\}$.

تمرين2 (05,5نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. M نقطة من هذا المستوي لاحقتها العدد المركب z ، $z=x+iy$ حيث x و y عددين حقيقيين. نعرّف العددين المركبين Z_1 و Z_2 بما يلي:

$Z_1=z.\bar{z}+iz-(2+i)\bar{z}-2-i$ و $Z_2=z^2-4z+4-i$.

1) أ) بيّن أنّ الكتابة الجبرية لـ Z_1 هي: $Z_1=x^2+y^2-2x-2y-2+i(2y-1)$.

ب) بيّن أنّ الكتابة الجبرية لـ Z_2 هي: $Z_2=x^2-y^2-4x+4+i(2xy-4y-1)$.

2) عيّن المجموعة (E_1) للنقط M من المستوي حتى يكون Z_1 عددا حقيقيا.

3) عيّن المجموعة (E_2) للنقط M من المستوي حتى يكون Z_1 عددا تخيليا صرفا.

4) عيّن المجموعة (E_3) للنقط M من المستوي حتى يكون Z_2 عددا تخيليا صرفا.

5) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $Z_2=-1-i$.

اقلب الورقة

تمرين3 (07,5نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1+e^{x}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) احسب $g'(x)$ ، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty\,;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+1-xe^{-x}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا $(\mathscr{D})$ معادلته $y=x+1$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{D})$.

3) بيّن أنّه من أجل كل x ، $f'(x)=e^{-x}.g(x)$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا (Δ) موازيا للمستقيم $(\mathscr{D})$. اكتب معادلة المماس (Δ).

5) احسب $f(-1)$ ثم ارسم المستقيم المقارب $(\mathscr{D})$ ، المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

6) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $xe^{-x}+m-1=0$.

تصحيح الفرض الثاني للفصل 2 : 2016م

تمرين 1 :

1) أ)

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{4-2i}{-2-4i} = \frac{2-i}{-1-2i} = i$$

$|i| = 1$ و $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \frac{BA}{BC} = 1$ ومنه $BA = BC$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = (\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في B.

ب) لتكن I منتصف $[AC]$. $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = -i$

$$|z_A - z_I| = |z_B - z_I| = |z_C - z_I| = \sqrt{10}$$

$$IA = IB = IC = r = \sqrt{10}$$

الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC، مركزها $I(0,-1)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{10}$.

2) أ)

$$\frac{1+z_C}{1+z_B} = \frac{-2-2i}{2i} = \frac{2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب)

$$\left(\frac{1+z_C}{1+z_B}\right)^{2016} = \sqrt{2}^{\,2016}\, e^{i\left(\frac{3\times 2016\pi}{4}\right)} = 2^{1008} e^{i(1512\pi)} = 2^{1008}$$

$$\left(\frac{1+z_C}{1+z_B}\right)^{1962} = \sqrt{2}^{\,1962}\, e^{i\left(\frac{3\times 1962\pi}{4}\right)} = 2^{981} e^{i\left(1471\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 2^{981} e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= 2^{981} e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2^{981} i$$

3) أ) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ و $3\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = 3 - 3i$

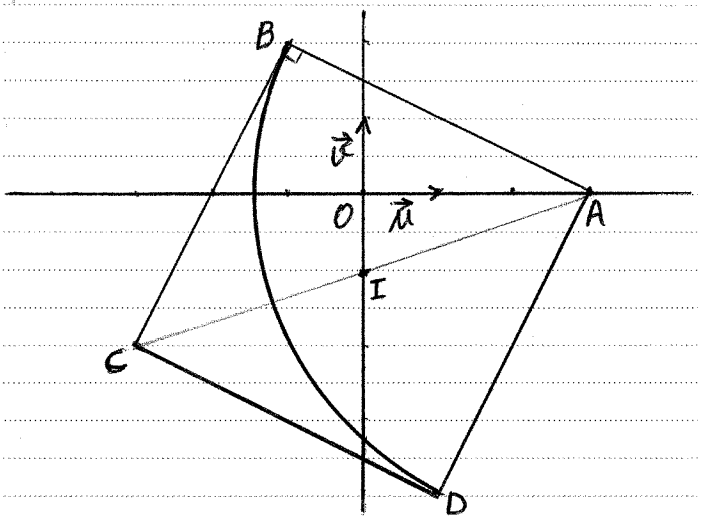
$$z' = iz + 3 - 3i$$

T دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه A ، لأن

$$\frac{3-3i}{1-i} = 3 = z_A$$

ب) $z_D = i z_B + 3 - 3i$

$$z_D = i(-1+2i) + 3 - 3i = 1 - 4i$$



ج) سابقا لدينا $BA = BC$ و $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}$

وكذلك $(z_B - z_A = z_C - z_D)$ أي $\vec{AB} = \vec{DC}$

ومنه الرباعي $ABCD$ مربع.

د)

$$z_D = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + z_C}{\alpha + \beta + 1} = 1 - 4i$$

$$\frac{(3\alpha - \beta - 3) + i(2\beta - 2)}{\alpha + \beta + 1} = 1 - 4i$$

$$\begin{cases} \frac{3\alpha - \beta - 3}{\alpha + \beta + 1} = 1 \\ \frac{2\beta - 2}{\alpha + \beta + 1} = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 4 \\ 4\alpha + 6\beta = -2 \end{cases}$$ تصبح $$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ 2\alpha + 3\beta = -1 \end{cases}$$

عند حل هذه الجملة نجد: $\alpha = 1$ و $\beta = -1$

تمرين 2 :

1) أ)

$$z_1 = (x+iy)(x-iy) + i(x+iy) - (2+i)(x-iy) - 2 - i$$

$$z_1 = x^2 + y^2 + ix - y - 2x + 2yi - ix - y - 2 - i$$

$$z_1 = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 + i(2y - 1)$$

ب)

$$z_2 = (x+iy)^2 - 4(x+iy) + 4 - i$$

$$z_2 = x^2 - y^2 + 2xyi - 4x - 4iy + 4 - i$$

$$z_2 = x^2 - y^2 - 4x + 4 + i(2xy - 4y - 1)$$

2) z_1 عددا حقيقيا إذا كان: $2y-1=0$

ومنه (E_1) مستقيم معادلته $y=\frac{1}{2}$.

3) z_1 عددا تخيليا صرفا إذا كان:

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ أي $x^2+y^2-2x-2y-2=0$

(E_2) دائرة مركزها $\Omega(1,1)$ ونصف قطرها $r=2$

4) z_2 تخيليا صرفا: $x^2-y^2-4x+4=0$

$(x-2)^2-y^2=0$ أي $(x-2-y)(x-2+y)=0$

(E_3) إتحاد المستقيمين: $y=x-2$ و $y=-x+2$

5) $z^2-4z+4-i=-1-i$

عند حل هذه المعادلة نجد $z^2-4z+5=0$

$z_1=2-i$ و $z_2=2+i$

تمرين 3:

I-1) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ (لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$)

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ (لأن $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$)

2) $g'(x)=(1+e^x)>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $g(0)=0$ إشارة $g(x)$:

		0	
	$-$	0	$+$

II-1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left[1+\frac{1}{x}-e^{-x}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (لأن $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x}=0$)

2) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=0$

ومنه (D) مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $(+\infty)$

لدراسة الوضعية ندرس إشارة $(f(x)-y)$

أي إشارة $(-xe^{-x})$.

		0	
	$+$	0	$-$

$x<0$: (C) فوق (D). $x>0$: (C) تحت (D)

$x=0$ (C) يقطع D عند $(0;1)$.

3) $f'(x)=1-(e^{-x}-xe^{-x})=1-e^{-x}+xe^{-x}$

$f'(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}}-1+x\right)=e^{-x}(e^x+x-1)$

$f'(x)=e^{-x}\cdot g(x)$ (من إشارة $g(x)$ لأن $e^{-x}>0$)

$x>0$: $f'(x)>0$ منه f متزايدة تماما

$x<0$: $f'(x)<0$ منه f متناقصة تماما

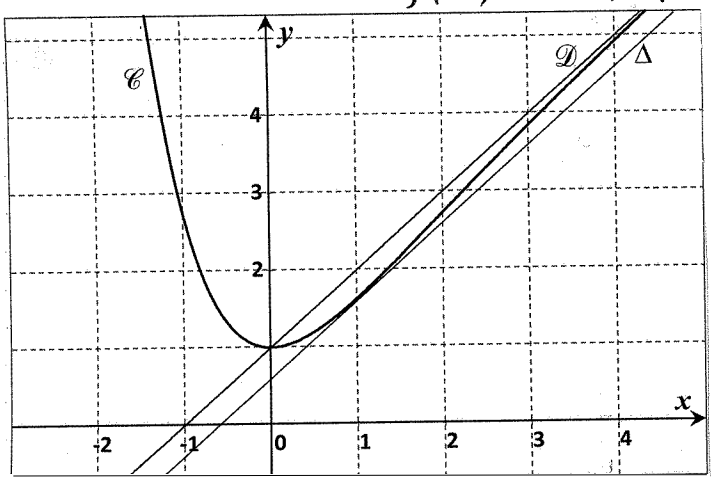
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) $f'(x_0)=1$ أي $1-e^{-x_0}+x_0e^{-x_0}=1$

$e^{-x_0}(-1+x_0)=0$ ومنه $x_0=1$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=x+1-e^{-1}$

5) $f(-1)=e\simeq 2{,}72$



6) $-xe^{-x}+1=m$

$x+1-xe^{-x}=x+m$ أي $f(x)=x+m$

فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات الموازية للمستقيمين (Δ) و (D).

$m<1-e^{-1}$: لا يوجد حلول

$m=1-e^{-1}$: حل مضاعف موجب

$1-e^{-1}<m<1$: حلان موجبان

$m=1$: حل واحد معدوم

$m>1$: حل واحد سالب

"عبد المطلب"