المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) دورة: ماي 2016

الشعبة: علوم تجريبية إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3سا و 30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

في الفضاء المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(1;0;6)$، $B(0;1;1)$، $C(-1;0;4)$، $D(1;1;2)$ والمستقيم $(\mathscr{D})$ المعرّف بتمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=t-1 \\ y=0 \\ z=t+4 \end{cases}$، حيث t عدد حقيقي.

1- تأكّد أنّ المستقيم $(\mathscr{D})$ هو المستقيم (AC).

2- اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$ الذي يشمل النقطة D و $\overrightarrow{AC}$ شعاع ناظمي له.

3- تأكّد أنّ النقطة C هي نقطة تقاطع المستقيم (AC) والمستوي $(\mathscr{P})$.

4- استنتج بعد النقطة D عن المستقيم (AC).

5- نعتبر سطح الكرة (S) التي مركزها النقطة B ونصف قطرها $R=3$.

أ) بيّن أنّ المستقيم (BD) عمودي على المستوي $(\mathscr{P})$.

ب) استنتج الوضع النسبي للمستقيم $(\mathscr{D})$ والكرة (S).

ج) بيّن أنّ $(\mathscr{P})$ و (S) يتقاطعان. عيّن الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة لهذا التقاطع.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=2$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n}$.

1- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1\le u_n\le \frac{n+1}{n}$. استنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

2- ادرس تغيرات المتتالية (u_n). استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

3- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{n+2}{n+1}$.

4- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $\ln u_0+\ln u_1+\ln u_2+...+\ln u_n=\ln(n+2)$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-1-i$ ، $z_B=1-i$ و $z_C=-1+2i$.

1- أ) احسب الأطوال $|z_B-z_A|$ ، $|z_C-z_A|$ و $|z_C-z_B|$. استنتج طبيعة المثلث ABC ثم احسب مساحته.

ب) اكتب z_A و z_B بالشكل الأسي ثم عيّن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n $(n\neq 0)$ بحيث $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{3n}=\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$.

2- أ) لتكن النقطة D صورة B بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته 2. بيّن أنّ لاحقة D هي $z_D=3-4i$.

ب) لتكن النقطة E مرجح الجملة $\{(A,5);(B,-9);(C,1)\}$. بيّن أنّ لاحقة E هي $z_E=5-2i$.

3- ليكن التشابه المباشر s الذي يحوّل النقطة A إلى D ويحوّل النقطة B إلى E.

أ) بيّن أنّ العبارة المركبة لهذا التشابه المباشر هي $z'=(1+i)z+3-2i$.

ب) عيّن مركز، نسبة وزاوية التشابه المباشر s.

ج) عيّن صورة النقطة C ومساحة صورة المثلث ABC بواسطة التحويل s.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-3;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x+4-\frac{3}{x+3}+\ln(x+3)$

1- بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-3;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,4<\alpha<-1,3$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-3;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2+3x+x\ln(x+3)$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستو المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-3} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ماذا يمثل المستقيم ذو المعادلة $x=-3$ بالنسبة لـ $(\mathscr{C})$؟

2- أثبت أنّه من أجل كل $x>-3$ فإنّ $f'(x)=g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر β حيث $-2,5<\beta<-2,4$.

4- احسب $f(1)$ ثم ارسم $(\mathscr{C})$ والمماس (Δ) لـ $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$. $(f(\alpha)\approx-2,9)$.

5- عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x[x+6+\ln(x+3)]=m$ حلين سالبين تماما.

6- نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-3;+\infty[$ بـ: $h(x)=\frac{-x^2+6x}{4}+\left(\frac{x^2-9}{2}\right)\ln(x+3)$

أ) أثبت أنّ الدالة h هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto x\ln(x+3)$ على المجال $]-3;+\infty[$.

ب) احسب المساحة الحيّز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمستقيمين: $x=-2$ و $x=0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(1;-1;3)$ و $B(-1;1;0)$،

المستوي $(\mathscr{P})$ الذي معادلته $x+y-z=0$، والمستقيم $(\mathscr{D})$ المعرّف بـ $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-5+t \\ z=5-t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB): أ) $\begin{cases} x=-1+k \\ y=1-k \\ z=3k \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x=-3+2k \\ y=3-2k \\ z=-3+3k \end{cases}$ ج) $\begin{cases} x=1-2k \\ y=-1+2k \\ z=-3k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

2- المستقيم (AB)، والمستقيم $(\mathscr{D})$: أ) متوازيان تماما ب) متقاطعان ج) ليسا من نفس المستوي

3- المستقيم $(\mathscr{D})$ والمستوي $(\mathscr{P})$: أ) متوازيان تماما ب) متقاطعان ج) $(\mathscr{D})$ محتوى في $(\mathscr{P})$

4- إحداثيات H المسقط العمودي لـ A على $(\mathscr{D})$: أ) $(3;-6;6)$ ب) $(1;1;5)$ ج) $(-1;-4;4)$

5- المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) محور القطعة المستقيمة [AB]:

أ) $2x-y-2z+3=0$ ب) $4x-4y+6z-9=0$ ج) $-2x+2y-3z=0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلتين: $z^2+8z+41=0$ و $\left(\overline{4z+5i}\right)^2-8\left(\overline{4z+5i}\right)+41=0$

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A، B، C و D التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-4+5i$ ، $z_B=-4-5i$ ، $z_C=1$ و $z_D=1-\frac{5}{2}i$.

1- اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$. استنتج طبيعة المثلث ABC.

2- أ) بيّن أنّ $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$. استنتج قيمة الزاوية $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$.

ب) بيّن أنّ D هي صورة B بتحويل نقطي T، يطلب كتابة عبارته المركبة، وتحديد عناصره المميزة.

3- لتكن النقطة E من هذا المستوي تحقّق: $5\overrightarrow{EB}+7\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

أ) بيّن أنّ النقطة E هي مرجح النقطتين B وC المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) بيّن أنّ لاحقة النقطة E هي $z_E=3+2i$.

4- أ) بيّن أنّ مجموعة النقط M من المستوي بحيث $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC}=0$ هي المستقيم (BC).

ب) عيّن صورة المستقيم (BC) بواسطة التحويل T.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^\star$ بـ: $u_n=\int_{n-1}^{n} e^{-\frac{x}{2}}dx$.

1- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n=2e^{-\frac{n}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1)$.

2- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n>0$.

ب) ادرس تغيرات المتتالية (u_n). استنتج أنّها متقاربة، ثم احسب نهايتها.

3- برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-\frac{1}{2}}$. احسب حدها الأوّل u_1.

4- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

أ) بيّن أنهّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n=\int_0^n e^{-\frac{x}{2}}dx$.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n. استنتج حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x^2-3)e^x-1$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2- ادرس اتّجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,7<\alpha<1,8$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2-2x-1)e^x-x+4$

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\mathscr{D})$ معادلته $y=-x+4$ بجوار $-\infty$.

2- أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها. (لاحظ أنّ $f'(x)=g(x)$)

ب) بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

3- أ) (Δ) المماس لـ $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0، معادلته $y=-x+4+2(1+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}}$. عيّن x_0.

ب) ارسم المماس (Δ)، المستقيم $(\mathscr{D})$ والمنحني $(\mathscr{C})$. (نأخذ $f(\alpha)\approx-6$ ، $f(0,6)\approx f(2,4)\approx 0$).

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(x^2-2x-1)e^x=m-4$ حلين مختلفين في الإشارة.

4- أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ: $f''(x)-2f'(x)+f(x)=-x+6+2e^x$

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند الصفر.

ج) احسب مساحة الحيّز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$، محور الفواصل، محور التراتيب والمستقيم $x=-1$.

تصحيح امتحان الفصل 3: 2016م

تمرين 1: (الموضوع 1) "عبد المطلب"

1) $A \in (\mathcal{D})$ و $C \in (\mathcal{D})$.

$t=2 \begin{cases} 1 = t-1 \\ 0 = 0 \\ 6 = t+4 \end{cases}$ $\quad t=0 \begin{cases} -1 = t-1 \\ 0 = 0 \\ 4 = t+4 \end{cases}$

2) $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\quad -2x-2z+d=0$

$D \in (\mathcal{P})$: $-2x_D-2z_D+d=0$ نجد $d=6$

ومنه: $(\mathcal{P})$ $\quad x+z-3=0$

3) $C \in (AC)$ و $C \in (\mathcal{P})$

$x_C+z_C-3=0$ ؛ $-1+4-3=0$ (محققة)

4) $\vec{CD}(2;1;-2)$

$d(D;(AC)) = CD = \sqrt{9} = 3$

5) أ) $\vec{BD}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (ناظمي لـ $(\mathcal{P})$)

$\vec{BD}=\vec{n}$ ومنه (BD) عمودي على $(\mathcal{P})$.

ب) بما أن $(\mathcal{P}) \perp (BD)$ فإن $(BD) // (AC)$.

ومنه البعد بين B و (AC) هو $CD=3$

إذن $(\mathcal{D})$ مماس لـ (S).

ج) $d(B;(\mathcal{P})) = BD = \sqrt{2} < 3$ ومنه $(\mathcal{P})$ يقطع (S) وفق دائرة مركزها D ونصف قطرها r، حيث $R^2 = r^2+BD^2$.

$r=\sqrt{R^2-BD^2} = \sqrt{9-2} = \sqrt{7}$

تمرين 2:

1) من أجل $n=1$: $U_1 = 2-\frac{1}{U_0} = \frac{3}{2}$

$1 \leq U_1 \leq \frac{1+1}{1}$ أي $1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$ (محققة)

نفرض أن $1 \leq U_n \leq \frac{n+1}{n}$ ونبرهن صحة $1 \leq U_{n+1} \leq \frac{n+2}{n+1}$

لدينا $1 \leq U_n \leq \frac{n+1}{n}$ ؛ $\frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{U_n} \leq 1$

$-1 \leq \frac{-1}{U_n} \leq \frac{-n}{n+1}$ ؛ $1 \leq 2-\frac{1}{U_n} \leq 2-\frac{n}{n+1}$

$1 \leq U_{n+1} \leq \frac{n+2}{n+1}$ (محققة)

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*$ فإن $1 \leq U_n \leq \frac{n+1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ و $1 \leq U_n \leq \frac{n+1}{n}$

باستعمال مبرهنة الحصر فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

2) $U_{n+1}-U_n = 2-\frac{1}{U_n}-U_n = \frac{-U_n^2+2U_n-1}{U_n}$

$U_{n+1}-U_n = \frac{-(U_n-1)^2}{U_n} \leq 0$

ومنه (U_n) متناقصة.

بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل $(U_n \geq 1)$ فإنها متقاربة.

3) من أجل $n=0$: $U_0 = \frac{0+2}{0+1} = 2$ (محققة)

نفرض أن $U_n = \frac{n+2}{n+1}$، ونبرهن صحة $U_{n+1} = \frac{n+3}{n+2}$

$U_{n+1} = 2-\frac{1}{U_n} = 2-\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}$ (محققة)

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}$ فإن $U_n = \frac{n+2}{n+1}$.

4) $\ln U_0+\ln U_1+\dots+\ln U_n = \ln(U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n)$

$= \ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\dots\times\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln(n+2)$

أو $(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\dots+\ln(n+2)-\ln(n+1) = \ln(n+2)$

تمرين 3:

1) أ) $|z_C-z_B| = \sqrt{13}$ ؛ $|z_B-z_A| = 2$

$|z_C-z_A| = 3$ ، $BC^2 = AB^2+AC^2$

ومنه ABC مثلث قائم في A.

مساحته $S = \frac{1}{2}AB \times AC = 3\ u.a$

ب) $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ و $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$

$e^{i\frac{21\pi n}{4}} = e^{i\frac{20\pi n}{4}}$ أي $\frac{21\pi n}{4} = \frac{20\pi n}{4}+2k\pi$

نجد $n=8k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ ومنه أصغر قيمة لـ n: $n_0=8$

2) أ) لدينا: $z'-z_C = 2(z-z_C)$

$$z_D - z_C = 2(z_B - z_C)$$

$$z_D = 2z_B - z_C = 3-4i$$

ب) $z_E = \dfrac{5z_A - 9z_B + z_C}{5-9+1} = 5-2i$

3) أ) $z_D = az_A + b$ و $z_E = az_B + b$

$z_E - z_D = a(z_B - z_A)$ ومنه $a = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$

$b = z_D - az_A = 3-2i$

إذن $z' = (1+i)z + 3 - 2i$

ب) لاحقة مركز التشابه: $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{3-2i}{-i} = 2+3i$

مركز التشابه $\Omega(2,3)$ ، نسبته $|1+i| = \sqrt{2}$

وزاويته $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$.

جـ) نسمي F صورة C بواسطة التشابه S.

$z_F = (1+i)z_C + 3 - 2i = -i$

صورة المثلث ABC هو المثلث DEF .

مساحة DEF: $S' = \sqrt{2}^2 \times S = 2\times 3 = 6\ u.a$

تمرين 4:

I 1) $g'(x) = \left[2 + \dfrac{3}{(x+3)^2} + \dfrac{1}{(x+3)}\right] > 0$

ومنه g متزايدة تماما.

2) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1,4;-1,3[$.

$g(-1,4) = -0,21 < 0$ و $g(-1,3) = 0,17 > 0$. ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $-1,4 < \alpha < -1,3$.

إشارة $g(x)$:

x		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

II 1) $f'(x) = 2x + 3 + \ln(x+3) + \dfrac{x}{x+3}$

نجد $f'(x) = g(x)$ وإشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

$x > \alpha$ f متزايدة تماما.

وطالما $x = \alpha$ ، $f'(\alpha) = 0$

$x < \alpha$ f متناقصة تماما.

2) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -3} \ln(x+3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+3) = +\infty$

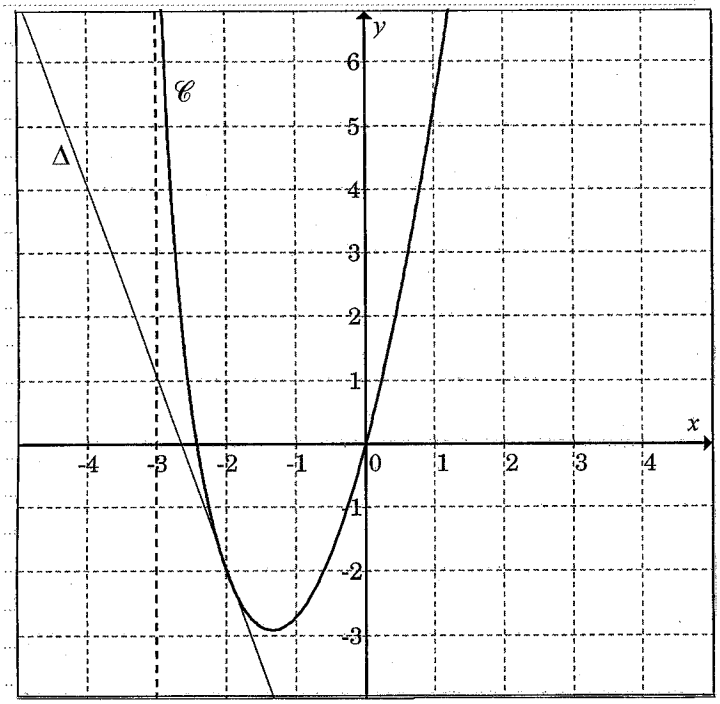
x	-3		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(0) = 0$. f مستمرة ومتناقصة تماما $]-2,5;-2,4[$

$f(-2,5) = 0,5 > 0$ و $f(-2,4) = -0,2 < 0$. ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $-2,5 < \beta < -2,4$

4) $f(1) = 5,4$ $\quad y = f'(-2)(x+2) + f(-2) = -3x - 8$



5) $f(x) = -3x + m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C})$

مع المستقيمات الموازية للمماس (Δ) (ميلها -3)

حلان سالبان تماما: $-8 < m < 0$

6) أ) $h'(x) = \dfrac{-x}{2} + \dfrac{3}{2} + x\ln(x+3) + \dfrac{x^2 - 9}{2(x+3)}$

$h'(x) = x\ln(x+3)$

ب) $A = \int_{-2}^{0} -f(x)\,dx = \int_{0}^{-2} f(x)\,dx$

$A = \int_{0}^{-2} (x^2+3x)\,dx + \left[h(x)\right]_{0}^{-2}$

$A = \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + h(x)\right]_{0}^{-2} \simeq 4,3\ u.a$

$= 9/2 \ln 3 - 8/3$

"عبد المطلب"

الموضوع 2

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $\begin{cases} x_A = -3+2k \\ y_A = 3-2k \\ z_A = -3+3k \end{cases}$ $k=2$ $\begin{cases} x_B = -3+2k \\ y_B = 3-2k \\ z_B = -3+3k \end{cases}$ $k=1$

الجواب الصحيح هو (ب)

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ (شعاع توجيه (D)) و $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$

(AB) و (D) غير متوازيين.

$\begin{cases} ① \; 1-2t=-3+2k \\ ② \; -5+t=3-2k \\ ③ \; 5-t=-3+3k \end{cases}$ من ① و ② $t=-4$ و $k=6$

لا يحققان ③

(AB) و (D) ليسا من نفس المستوي

الجواب الصحيح هو (ج)

3) ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

$\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ و منه (D) و (P) متوازيان تماما.

الجواب الصحيح هو (P)

4) لتكن $H(-1,-4,4)$ $\vec{AH}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$

$H\in(D)$ و $\vec{AH}\cdot\vec{u}=0$ $\longrightarrow$ $t=1$ $\begin{cases} x_H=1-2t \\ y_H=-5+t \\ z_H=5-t \end{cases}$

أي $(AH)\perp(D)$

الجواب الصحيح هو (ج)

5) لتكن I منتصف [AB]. $I(0;0;\frac{3}{2})$

ليكن (Q): $4x-4y+6z-9=0$ حيث $\vec{n_Q}\begin{pmatrix}4\\-4\\6\end{pmatrix}$

$(I\in Q)$ و $(\vec{n_Q}=2\vec{AB})$

الجواب الصحيح هو (ب)

تمرين 2:

I- $z^2+8z+41=0$

$\Delta=-100$ $z_1=-4-5i$ و $z_2=-4+5i$

$(\overline{-4z-5i})^2+8(\overline{-4z-5i})+41=0$

$\begin{cases} -4\bar{z}+5i=-4-5i \\ -4\bar{z}+5i=-4+5i \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{z}_1=1+\frac{5}{2}i \\ \bar{z}_2=1 \end{cases}$

ومنه $z_1=1-\frac{5}{2}i$ و $z_2=1$

II 1) $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-5-5i}{-5+5i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\frac{CB}{CA}=1$

$\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=(\vec{CA},\vec{CB})=\frac{\pi}{2}$

ABC مثلث قائم في C ومتساوي الساقين

2) أ) $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\pi/4}$

$\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\right)=(\vec{CB},\vec{CD})=\frac{\pi}{4}$

ب) $z_D-z_C=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_B-z_C)$

ومنه D هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه C زاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$z'=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)z+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i$

3) أ) $5\vec{EB}+7(\vec{BE}+\vec{EC})=\vec{0}$

$-2\vec{EB}+7\vec{EC}=\vec{0}$

ومنه E مرجح الجملة $\{(B,-2);(C,7)\}$

ب) $z_E=\frac{-2z_B+7z_C}{-2+7}=3+2i$

4) أ) مجموعة النقط هي المستقيم المار من B والعمودي على (AC) إذن هو (BC). (انظر II.1)

ب) لدينا $T(B)=D$ و $T(C)=C$. إذن صورة المستقيم (BC) هو المستقيم (CD).

تمرين 3:

1) $U_n=\int_{n-1}^{n}e^{-\frac{x}{2}}dx=-2\int_{n-1}^{n}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$

$=-2\left[e^{-x/2}\right]_{n-1}^{n}=-2\left[e^{-\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n-1}{2}}\right]$

ومنه: $U_n=2e^{-\frac{n}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1)$

2) أ) $e^{-\frac{n}{2}}>0$ و $(e^{\frac{1}{2}}-1)>0$ إذن $U_n>0$

ب) $U_{n+1}-U_n=2e^{-\frac{n-1}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1)-2e^{-\frac{n}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1)$

$=2e^{-\frac{n}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1)(e^{-\frac{1}{2}}-1)<0$

لأن $(e^{-\frac{1}{2}}-1)<0$ ومنه: (U_n) متناقصة

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة. $\lim_{n\to+\infty}U_n=0$ لأن $\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{n}{2}}=0$.

3) $U_{n+1}=2e^{-\frac{n-1}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1)=e^{-\frac{1}{2}}\times 2e^{-\frac{n}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1)$

$U_{n+1}=e^{-\frac{1}{2}}\times U_n$ إذن (U_n) هندسية $q=e^{-\frac{1}{2}}$

$U_1=2(1-e^{-\frac{1}{2}})$

4) أ) $S_n = \int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}dx + \int_1^2 e^{-\frac{x}{2}}dx + \dots + \int_{n-1}^{n} e^{-\frac{x}{2}}dx$ باستعمال علاقة شال:

$$S_n = \int_0^n e^{-\frac{x}{2}}dx$$

ب) $S_n = -2\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^n = -2\left(e^{-\frac{n}{2}} - 1\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$$

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\overset{0}{e^x} - 3\overset{0}{e^x} - 1\right)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (لأن $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$)

2) $g'(x) = (x^2+2x-3)e^x$

x	$-\infty$		-3		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	↗	$-0,7$	↘	$-6,4$	↗	0	↗	$+\infty$

3) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,7;1,8[$ و $g(1,7) = -1,6 < 0$ و $g(1,8) = 0,45 > 0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $1,7 < \alpha < 1,8$.

إشارة $g(x)$: $-$ α $+$

II-1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\overset{0}{e^x} - 2x\overset{0}{e^x} - \overset{0}{e^x} - x + 4\right) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(x - 2 - \frac{1}{x}\right)e^x - 1 + \frac{4}{x}\right] = +\infty$$

ب) $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\overset{0}{e^x} - 2x\overset{0}{e^x} - \overset{0}{e^x}\right) = 0$

2) أ) $f'(x) = g(x)$. إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ب) $f''(x) = g'(x) = (x^2+2x-3)e^x$

$(1;-2,4)$; $(-3;7,7)$

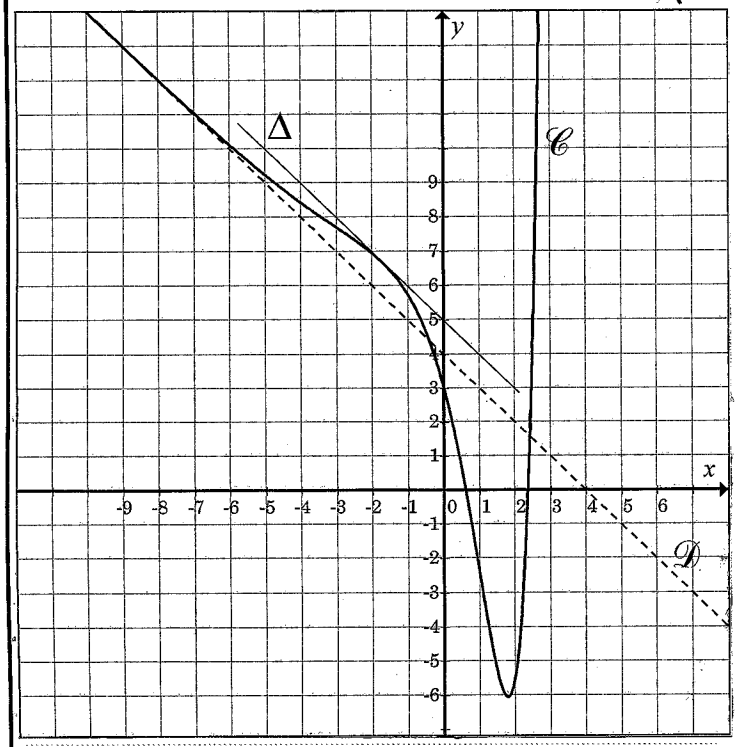
		-3		1	
	$+$	0	$-$	0	$+$

3) أ) $f'(x_0) = -1$

$(x_0^2 - 3)e^{x_0} = 0$ نجد $x_0 = -\sqrt{3}$

$x_0 = \sqrt{3}$ مرفوض (لا يحقق معادلة المماس)

ب)



ج) $f(x) = -x + m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات الموازية للمماس (Δ) (ميلها -1)

حلان مختلفان في الإشارة: $3 < m < 4$

4) أ) $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = g'(x) - 2g(x) + f(x) = -x + 6 + 2e^x$

ب) $F(x) = -f'(x) + 2f(x) - \frac{x^2}{2} + 6x + 2e^x + C$

$F(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x - \frac{x^2}{2} + 4x + 9 + C$

$F(0) = 0$ نجد $C = -12$

ج) $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{-1}^{0}$

$$A = \frac{15}{2} - \frac{8}{e} \simeq 4,56$$

"عبد المطلب"