الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**الفرض للفصل الثالث**	الموسم الدراسي: 2016/2015م المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (5نقاط)

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقطتين: $A(1;0;1)$ و $B(1;4;5)$.

1) $(\mathscr{P}_1)$ المستوي الذي يشمل النقطة A و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له. بيّن أنّ معادلة المستوي $(\mathscr{P}_1)$ هي $y+z-1=0$.

2) $(\mathscr{P}_2)$ المستوي الذي يشمل النقطة B و $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي له. بيّن أنّ معادلة $(\mathscr{P}_2)$ هي $x+y-z=0$.

3) بيّن أنّ المستويين $(\mathscr{P}_1)$ و $(\mathscr{P}_2)$ متعامدان، ثم عيّن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع $(\mathscr{P}_1)$ و $(\mathscr{P}_2)$.

4) $(\mathscr{P}_3)$ المستوي المحوري للقطعة $[AB]$. بيّن أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي $(\mathscr{P}_3)$ هي $y+z-5=0$.

5) (S) الكرة التي مركزها $\Omega(a;a;2a)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$، حيث a عدد حقيقي.

أ) عيّن العدد الحقيقي a حتى يكون سطح الكرة (S) مماسي لكل من المستويين $(\mathscr{P}_1)$ و $(\mathscr{P}_3)$.

ب) نفرض أنّ $a=1$. عيّن الطبيعة والعناصر المميّزة للمجموعة $(\mathscr{E})$ تقاطع المستوي $(\mathscr{P}_2)$ وسطح الكرة (S).

تمرين2 (5نقاط)

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة: $f(x)=\sqrt{2x^2+1}-1$

أ) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;2]$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) استنتج أنّه إذا كان $x\in[0;2]$ فإنّ $f(x)\in[0;2]$.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\sqrt{2u_n^2+1}-1$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<2$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(u_n-2)}{\sqrt{2u_n^2+1}+u_n+1}$. استنتج أنّ (u_n) متناقصة تماما.

جـ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

تمرين3 (10نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. فسّر النتيجتين بيانيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[1;2]$.

2) أ) أثبت أنّ النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$.

ب) بيّن أنّ النقطة A هي نقطة انعطاف للمنحني $(\mathscr{C})$.

3) أ) ارسم المنحني $(\mathscr{C})$ والمماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة A.

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $e^{x+m}+e^{m}-2=0$ حلا واحدا موجبا تماما.

4) احسب مساحة السطح المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=-\ln 3$ ، $x=\ln 3$ و $y=1$.

5) n عدد طبيعي غير معدوم. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $v_n=\int_{-\ln(n+1)}^{-\ln n} f(x)\,dx$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، فإنّ $v_n=2\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع: $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$. بيّن أنّ $S_n=2\ln(n+2)-2\ln 2$.

...

تصحيح فرض الفصل الثالث: 2016

تمرين 1:

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ $\quad 4y+4z+d=0$

$4y_A+4z_A+d=0$ نجد $d=-4$

ومنه: $(P_1): y+z-1=0$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad x+y-z+d=0$

$x_B+y_B-z_B+d=0$ نجد $d=0$

ومنه: $(P_2): x+y-z=0$

3) $\vec{AB}\cdot\vec{n}=0$ ومنه $(P_1)\perp(P_2)$

$y+z-1=0$ و $x+y-z=0$

بوضع $z=t$:

$$\begin{cases} y+t-1=0 \\ x+y-t=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

عند حل هذه الجملة نجد:

$$(\Delta): \begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

4) لتكن I منتصف $[AB]$. $I(1;2;3)$

$\vec{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P_3) و $I\in(P_3)$.

$4y+4z+d=0$

$4y_I+4z_I+d=0$ نجد $d=-20$

ومنه: (P_3) $\quad y+z-5=0$

5) أ) $d(\Omega;P_1)=d(\Omega;P_3)=\sqrt{2}$

$$\frac{|0+a+2a-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|0+a+2a-5|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$|3a-1|=2$ أو $|3a-5|=2$

$\begin{cases}3a-1=2 \\ 3a-1=-2\end{cases}$ أو و $\begin{cases}3a-5=2 \\ 3a-5=-2\end{cases}$ أو

$\begin{cases}a=1 \\ a=-\frac{1}{3}\end{cases}$ أو و $\begin{cases}a=\frac{7}{3} \\ a=1\end{cases}$ أو

في الأخير: $a=1$

ب) بما أن $(P_1)\parallel(P_3)$ و (S) مماسية لكل من (P_1) و (P_3) والمستوي (P_2) يشمل A و B وعمودي على (P_1) و (P_3)، فإن $(\mathcal{C})$ هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1,1,2)$ منتصف $[EA]$ ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$

يمكن حساب $d(\Omega,P_2)$ نجده صفر...

تمرين 2:

1) أ) $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}>0$

ومنه f متزايدة تماما على $[0;2]$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

ب) بما أن f متزايدة تماما على $[0;2]$:

إذا كان $0\leq x\leq 2$ فإن $f(0)\leq f(x)\leq f(2)$

أي $0\leq f(x)\leq 2$ وهو مبرهن.

2) أ) $n=0$: $U_0=1$ $\quad 0<1<2$ (محققة)

* نفرض أن $0<U_n<2$ ونبرهن $0<U_{n+1}<2$

طريقة 1: لدينا $U_{n+1}=f(U_n)$، من 1) ب) نستنتج أن $0<U_{n+1}<2$.

طريقة 2: $0<U_n<2$ أي $0<U_n^2<4$

$0<2U_n^2<8$ أي $1<2U_n^2+1<9$

$1<\sqrt{2U_n^2+1}<3$ ومنه: $0<\sqrt{2U_n^2+1}-1<2$

* في الأخير $0<U_n<2$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

ب) $U_{n+1}-U_n=\sqrt{2U_n^2+1}-1-U_n$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{\left(\sqrt{2U_n^2+1}-1-U_n\right)\left(\sqrt{2U_n^2+1}+1+U_n\right)}{\sqrt{2U_n^2+1}+1+U_n}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2-2U_n}{\sqrt{2U_n^2+1}+1+U_n}$$

$0<U_n<2$ و منه $-2<U_n-2<0$

إذن $U_n(U_n-2)<0$ أي (U_n) متناقصة تماما

ج) (U_n) محدودة من الأسفل ومتناقصة تماما، فهي متقاربة. نهايتها ℓ حيث

$f(\ell)=\ell$ (f مستمرة). $\ell=\sqrt{2\ell^2+1}-1$

$\ell^2-2\ell=0$ إما $\ell=2$ (مرفوض) أو $\ell=0$

تمرين 3:

1) أ) $f(x)=\dfrac{2}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$y=0$ و $y=2$ مستقيمان مقاربان لـ (C)

ب) $f'(x)=\dfrac{-2e^x}{(e^x+1)^2}<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0

f متناقصة تماما

ج) f مستمرة ومتناقصة تماما على $[1;2]$

و $f(1)=0{,}54>0{,}5$ و $f(2)=0{,}27<0{,}5$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0{,}5$

تقبل حلا وحيدا على المجال $[1;2]$

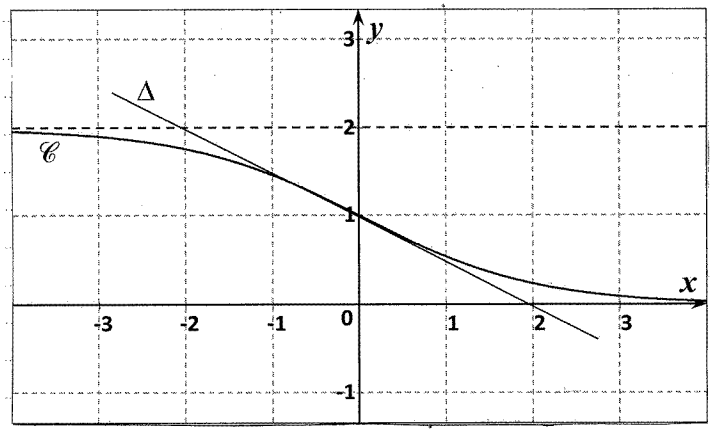
2) أ) $A(0;1)$ مركز تناظر: $f(-x)+f(x)=2$

$$\frac{2}{e^{-x}+1}+\frac{2}{e^x+1}=\frac{2e^x}{e^x+1}+\frac{2}{e^x+1}=\frac{2e^x+2}{e^x+1}=2$$

ب) $$f''(x)=\frac{-2e^x(e^x+1)^2-2e^x(e^x+1)(-2e^x)}{(e^x+1)^4}$$

$A(0;1)$ $\xrightarrow{-\quad 0 \quad +}$ $f''(x)=\dfrac{2e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$

3) أ) $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-\frac{1}{2}x+1$: (Δ)



ب) $e^m=\dfrac{2}{e^x+1}=f(x)$

حلا واحدا موجبا تماما لما $0<e^m<1$ أي $m<0$

4) $$A=\int_{-\ln 3}^{0}(f(x)-1)\,dx+\int_{0}^{\ln 3}(1-f(x))\,dx$$

بما أن $(0;1)$ مركز تناظر منه:

$$A=2\int_{-\ln 3}^{0}(f(x)-1)\,dx=2\left[-2\ln(e^{-x}+1)-x\right]_{-\ln 3}^{0}$$

$$A=4\ln 2-2\ln 3\simeq 0{,}58\,ua$$

5) أ) $$v_n=\left[-2\ln(e^{-x}+1)\right]_{-\ln(n+1)}^{-\ln n}$$

$$v_n=-2\left[\ln(e^{\ln n}+1)-\ln(e^{\ln(n+1)}+1)\right]$$

$$v_n=-2\left[\ln(n+1)-\ln(n+2)\right]=2\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

ب) طريقة 1:

$$\begin{aligned}
v_1&=2(\ln 3-\ln 2)\\
+\ v_2&=2(\ln 4-\ln 3)\\
+\ v_3&=2(\ln 5-\ln 4)\\
&\vdots\\
+\ v_n&=2(\ln(n+2)-\ln(n+1))
\end{aligned}$$

$$S_n=2\left(-\ln 2+\ln(n+2)\right)$$

طريقة 2:

$$S_n=\int_{-\ln 2}^{-\ln 1}f(x)\,dx+\int_{-\ln 3}^{-\ln 2}f(x)\,dx+\dots+\int_{-\ln(n+1)}^{-\ln n}f(x)\,dx$$

باستعمال علاقة شال: $S_n=\int_{-\ln(n+1)}^{0}f(x)\,dx\dots$

طريقة 3: البرهان بالتراجع ...

"عبد المطلب"