| | | |
|---|---|---|
| الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)<br>المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"<br>المادة: رياضيات | **اختبار**<br>**الفصل الأول** | الموسم الدراسي: 2017/2016م<br>المدة: ساعتان (2سا)<br>إعداد: عبد المطلب |

**تمرين1** (3نقاط)

نعتبر المعادلتين التفاضليتين المعرفتين على $\mathbb{R}$: $y'-2y=0 \ldots (E)$ و $y'-2y=\dfrac{e^{3x}}{e^x+1} \ldots (F)$

1) لتكن $g$ مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (E)، عيّن عبارة $g(x)$.

2) لتكن $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e^{2x}\ln(e^x+1)$. بيّن أنّ الدالة $h$ هي حل للمعادلة (F).

3) لتكن $f$ حلا للمعادلة (F) حيث $f'(0)=2\ln 2$ ، احسب $f(0)$ ثم أوجد عبارة $f(x)$ علما أنّ $f=g+h$ .

**تمرين2** (9نقاط)

**I-** $g$ الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^x-x$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ .

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة $g$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) استنتج أنّ $g(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}$.

**II-** $f$ الدالة العددية المعرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{xe^x-1}{e^x-1}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجالي تعريفها.

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة أحدهم $(\Delta)$ معادلته $y=x$ .

ج) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل $(\Delta)$، مع تحديد نقطة تقاطعهما.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(e^x-1)^2}$ .

ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدالة $f$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

ب) بيّن أنّ $\alpha e^{\alpha}=1$ وأنّ $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\dfrac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1}$. فسّر النتيجة الأخيرة هندسيا.

4) أ) ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحني $(\mathscr{C})$.

ب) استعمل $(\mathscr{C})$ لتعيين قيم الوسيط الحقيقي $m$ بحيث تقبل المعادلة $me^x-x-m+1=0$ حلا واحدا موجبا.

5) $h$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $\begin{cases} h(x)=f(x) & x\le 1 \text{ و } x\neq 0 \\ h(x)=(x-2)^2 & 1<x\le 4 \end{cases}$

أ) بيّن أنّ الدالة $h$ مستمرة وأنّها غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ .

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة $h$ على $\mathbb{R}^*$.

ج) ارسم المنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $h$ ونصفي المماسين لـ$(\mathscr{C}')$ عند $x_0=1$ .

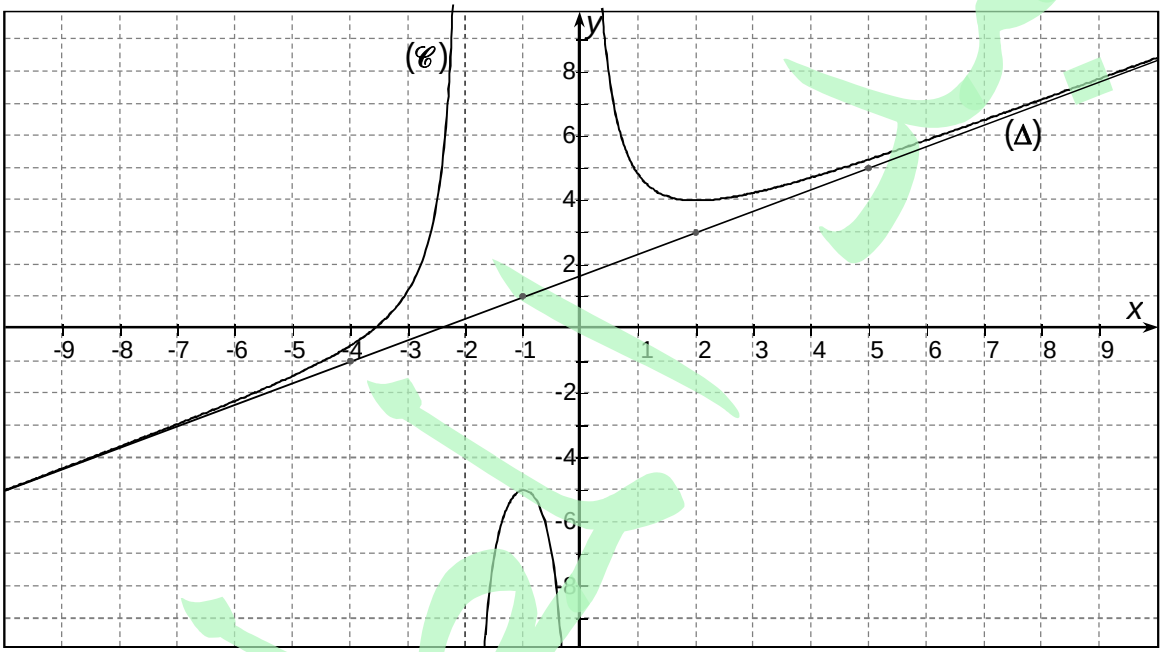
اقلب الورقة

**تمرين3** (8نقاط)

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة والقابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{-2;0\}$.

فيما يلي، جدول تغيرات الدالة $f$ وبيانها $(\mathscr{C})$. $(\Delta)$ هو المستقيم المقارب المائل لـ$(\mathscr{C})$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-5$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |




استعمل الجدول أو القراءة البيانية للإجابة بصحيح أو خطأ عن كل اقتراح مع التبرير. (عند الخطأ اذكر الصواب)

1) المستقيمان اللذين معادلتيهما: $x = -2$ و $y = 0$ مقاربان للمنحني $(\mathscr{C})$.

2) المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$ يقع دوما أسفل المنحني $(\mathscr{C})$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $D_f$.

3) المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$ معادلته: $y = 2x + 5$.

4) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا سالبا على $D_f$.

5) إذا كان العدد الحقيقي $x$ حيث $x \geq 3$ فإنّ $f(x) \leq f(3)$.

6) $m$ وسيط حقيقي. المعادلة $f(x) = m - 1$ تقبل حلا واحدا سالبا عندما يكون $-4 < m < 5$.

7) لتكن $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2;0\}$ بـ: $g(x) = e^{-f(x)}$. الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $]0;2[$.

8) لتكن $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = f(x^2)$. $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} h(x) = +\infty$ و $h'(\sqrt{2}) = 0$.

# تصحيح اختبار الفصل 1: (2016)

## تمرين 1:

1) $y' = 2y$ ومنه $g(x) = Ce^{2x}$ $(C \in \mathbb{R})$

2) $h'(x) = 2e^{2x}\ln(e^x+1) + \frac{e^x \times e^{2x}}{e^x+1}$

$h'(x) = 2e^{2x}\ln(e^x+1) + \frac{e^{3x}}{e^x+1}$

$h$ حل لـ $(F)$ : $h'(x) - 2h(x) = \frac{e^{3x}}{e^x+1}$

$h'(x) - 2h(x) = 2e^{2x}\ln(e^x+1) + \frac{e^{3x}}{e^x+1} - 2e^{2x}\ln(e^x+1)$

$h'(x) - 2h(x) = \frac{e^{3x}}{e^x+1}$ (محققة)

3) $f$ حل للمعادلة $(F)$:

$f'(x) - 2f(x) = \frac{e^{3x}}{e^x+1}$

$f'(0) - 2f(0) = \frac{e^0}{e^0+1}$

$2\ln 2 - 2f(0) = \frac{1}{2}$

ومنه $f(0) = -\frac{1}{4} + \ln 2$

لدينا: $f(x) = g(x) + h(x)$

$f(x) = Ce^{2x} + e^{2x}\ln(e^x+1)$

$f(0) = Ce^0 + e^0\ln 2 = -\frac{1}{4} + \ln 2$

$C + \ln 2 = -\frac{1}{4} + \ln 2$ ومنه $C = -\frac{1}{4}$

في الأخير:

$f(x) = -\frac{1}{4}e^{2x} + e^{2x}\ln(e^x+1)$

## تمرين 2:

I-1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 + \infty = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$ ($\frac{e^x}{x} \to +\infty$)

2) $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = 0$ لما $e^x = 1$ أي $x = 0$

$g'(x) > 0$ لما $x > 0$ ($g$ متزايدة تماما)

$g'(x) < 0$ لما $x < 0$ ($g$ متناقصة تماما)

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3) بما أن القيمة الحدية الصغرى أكبر تماما من 0 ومنه: $g(x) > 0$

II-1-أ)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to 0}{xe^x} - 1}{\underset{\to 0}{e^x} - 1} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(x - \overset{\to 0}{\frac{1}{e^x}}\right)}{e^x\left(1 - \underset{\to 0}{\frac{1}{e^x}}\right)} = +\infty$

$\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = +\infty$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x\to0^-}(xe^x - 1) = -1 \\ \lim_{x\to0^-}(e^x - 1) = 0^+ \end{cases}$

إشارة $(e^x - 1)$

$-$ $0$ $+$

$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = -\infty$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x\to0^+}(xe^x - 1) = -1 \\ \lim_{x\to0^+}(e^x - 1) = 0^+ \end{cases}$

ب) $\lim_{x \to 0^{+}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 0^{-}} f(x) = +\infty$

ومنه $x=0$ مستقيم مقارب لـ $(C)$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ ومنه $y=1$ مستقيم مقارب لـ $(C)$ عند $(-\infty)$.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{xe^x - 1}{e^x - 1} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\to 0}}{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)_{\to 0}^{\to +\infty}} = 0$$

ومنه: $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C)$ بجوار $(+\infty)$.

ج) لدراسة وضعية $(C)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$ ندرس إشارة: $f(x) - y = \frac{x-1}{e^x - 1}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^x - 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x) - y$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

لما: $]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$ ، $(C)$ فوق $(\Delta)$

لما: $]0; 1[$ ، $(C)$ يقع تحت $(\Delta)$

$(C)$ يقطع $(\Delta)$ عند $(1; 1)$

2) أ) $$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - e^x(xe^x - 1)}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $e^x > 0$ و $(e^x - 1)^2 > 0$ لما $x \in \mathbb{R}^*$ ومنه $g(x) > 0$ و $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

3) أ) $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,5 ; 0,6[$ ، $f(0,5) = -0,3 < 0$ و $f(0,6) = 0,1 > 0$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، $0,5 < \alpha < 0,6$.

ب) $f(\alpha) = 0$ أي $\frac{\alpha e^\alpha - 1}{e^\alpha - 1} = 0$

$\alpha e^\alpha - 1 = 0$ ومنه $\alpha e^\alpha = 1$

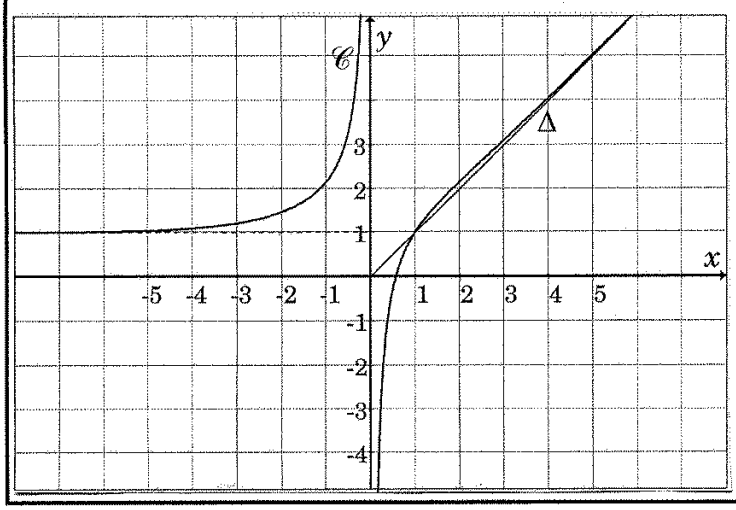
$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{e^\alpha(e^\alpha - \alpha)}{(e^\alpha - 1)^2}$$

$$f'(\alpha) = \frac{e^{2\alpha} - \alpha e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^2} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{(e^\alpha - 1)^2}$$

$$f'(\alpha) = \frac{(e^\alpha - 1)(e^\alpha + 1)}{(e^\alpha - 1)(e^\alpha - 1)} = \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1}$$

$f$ قابلة للاشتقاق عند $\alpha$ فهي تقبل مماسا عند $\alpha$ معامل توجيهه: $\frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1}$.

4) أ) الرسم:



ب) $m(e^x - 1) = x - 1$

$$m = \frac{x-1}{e^x - 1}$$

$$x + m = \frac{x-1}{e^x-1} + x$$

ومنه: $f(x) = x + m$

حلول هذه المعادلة عبارة عن فواصل نقط تقاطع $(C)$ مع المستقيمات الموازية لـ $(\Delta)$ تقبل حلا موجبا واحدا لما $m \leq 0$

5) أ) $h(1) = f(1) = \frac{e-1}{e-1} = 1$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} h(x) = 1 = h(1)$$

ومنه $h$ مستمرة عند 1

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\left(\frac{xe^x - 1}{e^x - 1}\right) - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{xe^x - e^x}{(e^x-1)(x-1)} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{e^x(x-1)}{(x-1)(e^x-1)}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e}{e-1} = h'_g(1)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x-2)^2 - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x-3)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x-3) = -2 = h'_d(1)$$

$h'_d(1) \neq h'_g(1)$ ومنه $h$ غير قابلة للاشتقاق عند 1.

ب) من أجل $1 < x \leq 4$:

$$h(x) = (x-2)^2$$

$$h'(x) = 2(x-2)$$

| $x$ | 1 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $-$ | 0 | $+$ | |

ومن أجل $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[$

$$h(x) = f(x)$$

وهي متزايدة تماما على هذا المجال

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $h(x)$ | 1 | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | 4 |

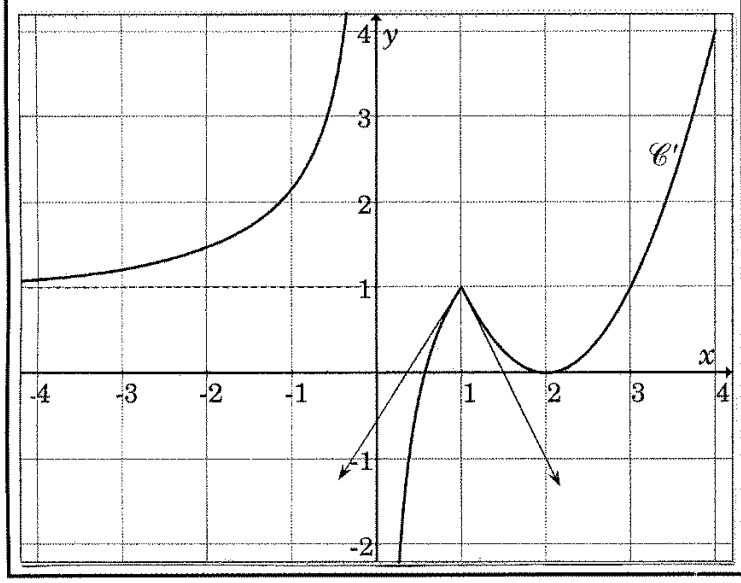
ج) معادلتي نصفي المماسين:

$$y_1 = h'_g(1)(x-1) + h(1) = \frac{e}{e-1}(x-1) + 1$$

$$y_1 = \frac{e}{e-1}x - \frac{1}{e-1}$$

$$y_2 = h'_d(1)(x-1) + h(1) = -2(x-1) + 1 = -2x + 3$$

الرسم:



**تمرين 3:**

1) **خطأ**: من جدول التغيرات،

$\lim_{x \to -2^{-}} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to -2^{+}} f(x) = -\infty$

ومنه $x = -2$ مستقيم مقارب لـ $(C)$

$\lim_{x \to 0^{-}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 0^{+}} f(x) = +\infty$

ومنه $x = 0$ مستقيم مقارب لـ $(C)$.

2) **خطأ**: من البيان $(C)$،

لما $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]0; +\infty[$ $(C)$ أعلى $(\Delta)$

ولما $x \in ]-2; 0[$ $(C)$ يقع أسفل $(\Delta)$

3) **خطأ**: باستعمال البيان $(C)$:

معادلة مستقيم: $y = ax + b$

نختار نقطتين: $(-1; 1)$ و $(2; 3)$

عند حل هذه الجملة $\begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$ نجد:

$a = \frac{2}{3}$ و $b = \frac{5}{3}$

ومنه: $(\Delta)$ $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

4) **صحيح**:

* باستعمال البيان: $(C)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث $-4 < \alpha < -3$.

* باستعمال الجدول: عندما يكون $x \in ]-2; 0[ \cup ]0; +\infty[$، $f(x) = 0$ لا تقبل حلولا. ولما $x \in ]-\infty; -2[$ $f$ مستمرة ومتزايدة تماما، و $0 \in ]-\infty; +\infty[$، منه $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا سالبا.

5) **خطأ**: باستعمال الجدول، $f$ متزايدة تماما على $[3; +\infty[$ ومنه إذا كان $x \geq 3$ فإن $f(x) \geq f(3)$.

6) **صحيح**: باستعمال البيان $(C)$ $f(x) = m - 1$ تقبل حلا واحدا سالبا تماما لما: $-5 < m - 1 < 4$

ومنه: $-4 < m < 5$

7) **خطأ**: باستعمال الجدول:

لما $0 < x < 2$، $f$ متناقصة $(f'(x) < 0)$

ولدينا: $g'(x) = -f'(x)\, e^{f(x)}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-f'(x)$ وهي موجبة ومنه $g$ متزايدة تماما على المجال $]0; 2[$.

8) **صحيح**: باستعمال الجدول:

لدينا: $\lim_{x \to 0^{-}} x^2 = 0^{+}$

ومنه: $\lim_{x \to 0^{-}} h(x) = \lim_{x \to 0^{+}} f(x) = +\infty$

لدينا: $h'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$

ومنه: $h'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot f'(2) = 2\sqrt{2} \times 0 = 0$

عبد المطلب