المؤسسة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) **المستوى:** ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" **المادة:** رياضيات	**الفرض الأول** **للفصل الأول**	**الموسم الدراسي:** 2016/2017م **المدة:** ساعتان (2سا) **إعداد:** عبد المطلب

تمرين1 (6نقاط) احسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{x^2-3x+4}$
2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3x-11}{(x+2)^2}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{x^3+x^2-x+1}{x-x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)\sqrt{2x+9}-3}{x}$

تمرين2 (8نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$-{-1 ; 1} بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-1}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل $x\neq -1$ و $x\neq 1$ فإنّ $f(x)=a+\dfrac{bx}{x^2-1}$.

2) احسب النهايات عند حدود مجالات تعريف الدالة f.

3) اكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathscr{C})$.

4) ادرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

5) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم $(\mathscr{D})$ الذي معادلته $y=1$.

6) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة A حيث A(0;1).

7) بيّن أنّ $f(-x)+f(x)=2$. استنتج أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل كمركز تناظر النقطة A.

تمرين3 (6نقاط)

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$-{0} بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{2x}$ ، حيث α و β عددين حقيقيين.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$-{0} ، فإنّ $f'(x)=\dfrac{x^2-\beta}{2x^2}$.

2) عيّن العددين α و β بحيث المنحني الممثل للدالة f يقبل عند النقطة (1;0) مماسا معادلته $y=x-1$.

3) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} g(x)=x-\sqrt{x^2-2x+2} & x\leq 1\\ g(x)=\dfrac{x^2-1}{2x} & x>1\end{cases}$$

أ) بيّن أنّ الدالة g مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

ب) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$. استنتج أنّ الدالة g قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.

تصحيح الفرض 1 للفصل 1 (2016)

تمرين 1:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x^2-3x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$

2) $\lim_{x\to-2} \frac{x^2-3x-11}{(x+2)^2} = -\infty$ ($x^2-3x-11 \to -1$, $(x+2)^2 \to 0^+$)

3) $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^3+x^2-x+1}{x-x^2} = +\infty$ ($x^3+x^2-x+1 \to 2$, $x-x^2 \to 0^+$)

إشارة $(x-x^2)$: $-\ 0\ +\ 1\ -$

4) $\lim_{x\to2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(3x+1)}{x-2}$

$= \lim_{x\to2} (3x+1) = 7$

5) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-2x\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\right) = -\infty$ ($\frac{1}{x^2} \to 0$)

6) نستعمل تعريف العدد المشتق بوضوح:

$f(x) = (x+1)\sqrt{2x+9}$

$\lim_{x\to0} \frac{(x+1)\sqrt{2x+9}-3}{x} = \lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

$f'(x) = \sqrt{2x+9} + \frac{x+1}{\sqrt{2x+9}} = \frac{3x+10}{\sqrt{2x+9}}$

$\lim_{x\to0} \frac{(x+1)\sqrt{2x+9}-3}{x} = f'(0) = \frac{10}{3}$

تمرين 2:

1) $f(x) = a + \frac{bx}{x^2-1} = \frac{ax^2+bx-a}{x^2-1}$

بالمطابقة مع $f(x)$ نجد: $a=1$ و $b=3$

ومنه: $f(x) = 1 + \frac{3x}{x^2-1}$

2) $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

إشارة (x^2-1): $+\ -1\ -\ 1\ +$

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x^2+3x-1}{x^2-1} = -\infty$ ($x^2+3x-1 \to -3$, $x^2-1 \to 0^+$)

$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{x^2+3x-1}{x^2-1} = +\infty$ ($x^2+3x-1 \to -3$, $x^2-1 \to 0^-$)

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^2+3x-1}{x^2-1} = -\infty$ ($x^2+3x-1 \to 3$, $x^2-1 \to 0^-$)

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2+3x-1}{x^2-1} = +\infty$ ($x^2+3x-1 \to 3$, $x^2-1 \to 0^+$)

3) $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$

ومنه $x=-1$ مستقيم مقارب لـ (C)

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$

ومنه $x=1$ مستقيم مقارب لـ (C)

$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 1$ ومنه $y=1$ مستقيم مقارب

4) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2-1)-2x(x^2+3x-1)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = \frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2} = \frac{-3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$; $f'(x) < 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$ ↘	1

5) ندرس إشارة : $f(x)-y = \dfrac{3x}{x^2-1}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

لما $x \in]-\infty;-1[\cup]0;1[$ ؛ (C) أسفل (D).

لما $x \in]-1;0[\cup]1;+\infty[$ ؛ (C) أعلى (D).

(C) يقطع (D) عند النقطة $(0;1)$.

6) $(\Delta): y = f'(0)(x-0)+f(0) = -3x+1$

7) $f(-x)+f(x) = \dfrac{x^2-3x-1}{x^2-1} + \dfrac{x^2+3x-1}{x^2-1}$

$= \dfrac{2x^2-2}{x^2-1} = \dfrac{2(x^2-1)}{x^2-1} = 2$

لدينا $A(\alpha;\beta)$ مركز تناظر إذا تحقق :

$x \in D_f$ ، $(2\alpha-x) \in D_f$ ، $f(2\alpha-x)+f(x) = 2\beta$

بوضع $\alpha=0$ و $\beta=1$ نجد أن A مركز تناظر.

تمرين 3:

1) $f'(x) = \dfrac{(2x+\alpha)(2x) - 2(x^2+\alpha x+\beta)}{(2x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2-2\beta}{4x^2} = \dfrac{x^2-\beta}{2x^2}$

2) $f(1)=0$ و $f'(1)=1$ (ميل المماس)

$$\begin{cases} \dfrac{1+\alpha+\beta}{2} = 0 & (1) \\ \dfrac{1-\beta}{2} = 1 & (2) \end{cases}$$

من (2) $\beta=-1$

نعوض في (1) نجد $\alpha=0$

3) أ) لدينا : $g(1) = 1-\sqrt{1-2+2} = 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \left(x-\sqrt{x^2-2x+2}\right) = 0 = g(1)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{x^2-1}{2x} = 0 = g(1)$

ومنه g مستمرة عند $x_0 = 1$.

ب) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{x-\sqrt{x^2-2x+2}}{x-1}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ لذا نستعمل عبارة المرافق :

$= \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-2x+2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}{(x-1)\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}$

$= \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{2x-2}{(x-1)\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}$

$= \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{2}{x+\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{2}{2} = 1 = f'_g(1)$

f قابلة للاشتقاق عند 1 من اليسار.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{x^2-1}{2x(x-1)} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{2x(x-1)}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{x+1}{2x} = \dfrac{2}{2} = 1 = f'_d(1)$

f قابلة للاشتقاق عند 1 من اليمين.

* $f'_g(1) = f'_d(1)$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند 1

"عبد المطلب"