الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2017/2016 المدة: ثلاث ساعات (3سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (4,5نقطة)

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $2z^2-10z+25=0$.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B لاحقتيها على الترتيب: $z_A=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_B=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$.

1) أ) اكتب كل من z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) n عدد طبيعي. بيّن أنّ العدد $(z_A{}^n+z_B{}^n)$ حقيقي.

2) لتكن النقطة C مرجح الجملة المثقلة $\{(O,-1);(A,1);(B,1)\}$.

أ) بيّن أنّ لاحقة النقطة C هي $z_C=5$.

ب) بيّن أنّ النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر الذي مركزه O، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

3) أ) بيّن أنّ $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) استنتج أنّ النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران (r) الذي مركزه C ويطلب تعيين زاويته.

ج) عيّن لاحقة النقطة D صورة B بهذا الدوران. استنتج صورة المثلث ABC بالتحويل (r).

تمرين2 (4,5نقطة)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(1;-2;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(0;1;-1)$ و $D(-4;-3;2)$. لتكن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$، ولتكن I' منتصف القطعة $[AC]$.

1) أ) تحقّق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا، وأنّ $5x+y-2z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

ب) بيّن أنّ المثلث ABC متساوي الساقين، ثم تحقّق أنّ مساحته هي $\sqrt{30}\,u.a$.

2) أ) احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC). استنتج أنّ A هي المسقط العمودي لـ D على (ABC).

ب) بيّن أنّ حجم رباعي الوجوه ABCD هو $10\,u.v$، ثم احسب بطريقتين مختلفتين مساحة المثلث ABD.

3) لتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $MA^2-MC^2=9$

أ) بيّن أنّ المجموعة (E) تكافئ: $2\overrightarrow{MI'}.\overrightarrow{CA}=9$.

ب) تأكّد أنّ النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E)، ثم استنتج طبيعة المجموعة (E).

تمرين3 (4نقاط)

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ بما يلي: $u_n = e^{-4n+3}$.

أ) بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها q وحدّها الأوّل u_0.

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج؟

ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ بما يلي: $v_n = \dfrac{\ln(u_n)+1}{2}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية، يطلب حساب أساسها r وحدّها الأوّل v_0.

ب) احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

ج) اكتب u_n بدلالة v_n، ثم احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.

تمرين4 (7نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x\ln x - x + 1$

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) استنتج أنّ $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+^*$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = e^x(\ln x - 1)$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$، ثم أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.

ج) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة لحامل محور الفواصل، مع تحديد نقطة تقاطعهما.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+^*$، $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{x}$.

ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها، وذلك دون حساب $f''(x)$.

3) احسب $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$، $f(2)$ و $f(3)$ ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

4) لتكن h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = e^{|x|}(\ln|x| - 1)$

بيّن أنّ الدالة h زوجية ثم استعمل المنحني $(\mathscr{C})$ لرسم المنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h.

انتهى

تصحيح اختبار الفصل 2: (2017)

تمرين 1:

I $\quad 2z^2 - 10z + 25 = 0$

$\Delta = -100 = 100i^2 = (\pm 10i)^2$

$z_1 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i \; ; \; z_2 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$

II 1) أ) $z_A = \frac{5\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \; ; \; z_B = \frac{5\sqrt{2}}{2} e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

ب) $z_A^n = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

و $z_B^n = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

لأن z_A و z_B مترافقين $(z_A = \overline{z_B})$

ومنه: $z_A^n + z_B^n = 2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}$

وهو عدد حقيقي

2) أ) $z_C = \frac{-z_O + z_A + z_B}{-1+1+1} = 5$

ب) $z' - w = re^{i\theta}(z - w)$

$z_C - z_O = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_B - z_O)$

$z_C = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i\right)$

$z_C = (1+i)\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i\right) = 5$

3) أ) $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\frac{-5}{2} - \frac{5}{2}i}{-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i} = \frac{-5-5i}{-5+5i}$

$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i = 1.e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA} = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ومنه ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين

ب) $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

$z_B - z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_C)$

ومنه B هي صورة A بالدوران الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ج) $z_D - z_C = i(z_B - z_C)$

ومنه $z_D = \frac{15}{2} - \frac{5}{2}i$

صورة ABC هو المثلث BDC.

تمرين 2:

1) أ) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا: $\frac{0}{-1} \neq \frac{4}{3}$

$$\begin{cases} 5x_A + y_A - 2z_A - 3 = 0 : A \in (ABC) \\ 5x_B + y_B - 2z_B - 3 = 0 : B \in (ABC) \\ 5x_C + y_C - 2z_C - 3 = 0 : C \in (ABC) \end{cases}$$

ب) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ $\quad BC = AC = \sqrt{11}$

ومنه ABC متساوي الساقين.

لدينا $I(1;0;1)$ و $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$A_{(ABC)} = \frac{1}{2}AB \times IC = \frac{1}{2}\sqrt{20} \times \sqrt{6} = \sqrt{30}$

2) أ) $d(D;(ABC)) = \frac{|1 - 4\times5 - 3 - 2(2) - 3|}{\sqrt{25+1+4}}$

$d(D;(ABC)) = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-5\\-1\\2\end{pmatrix}$ ؛ $d(D;(ABC)) = AD = \sqrt{30}$

ومنه A هي المسقط العمودي لـ D على (ABC).

ب) $V_{(ABCD)} = \frac{1}{3}A_{(ABC)} \times AD = \frac{1}{3} \times \sqrt{30} \times \sqrt{30} = 10$

طريقة 2: لدينا ABD قائم في A ومنه

$A_{(ABD)} = \frac{1}{2}AB \times AD = \frac{1}{2}\sqrt{20} \times \sqrt{30} = 5\sqrt{6}$

طريقة 2:

$$V_{(ABCD)} = \frac{1}{3} A_{(ABD)} \times CI$$

$$A_{(ABD)} = \frac{3V}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}$$

3) أ)

$$MA^2 - MC^2 = (\vec{MA} + \vec{MC})(\vec{MA} - \vec{MC})$$

$$= (\vec{MI'} + \vec{I'A} + \vec{MI'} + \vec{I'C})(\vec{CM} + \vec{MA})$$

$$= 2\vec{MI'} \cdot \vec{CA}$$

ومنه $(E): 2\vec{MI'} \cdot \vec{CA} = 9$

ب) $B\vec{I'}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ و $\vec{CA}(1; -3; 1)$

$$2\vec{BI'} \cdot \vec{CA} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{15}{2} - \frac{5}{2}\right) = 9$$

ومنه $B \in (E)$.

$$2\vec{MI'} \cdot \vec{CA} = 2(\vec{MB} + \vec{BI'}) \cdot \vec{CA}$$

$$= 2\vec{MB} \cdot \vec{CA} + \underbrace{2\vec{BI'} \cdot \vec{CA}}_{9} = 9$$

ومنه $\vec{MB} \cdot \vec{CA} = 0$

(E) هي المستوي الذي يشمل B و $\vec{CA}$ شعاع ناظمي له.

تمرين 3:

1) أ)

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{-4n-4+3}}{e^{-4n+3}} = e^{-4}$$

ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-4}$ وحدها الأول $U_0 = e^3$

ب)

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} e^{-4n+3} = 0$$

ومنه (U_n) متقاربة

ج)

$$S_n = U_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

$$S_n = e^3 \left(\frac{1 - e^{-4n-4}}{1 - e^{-4}}\right)$$

2) أ)

$$V_{n+1} - V_n = \frac{\ln(U_{n+1}) + 1}{2} - \frac{\ln(U_n) + 1}{2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{\ln(U_{n+1}) - \ln(U_n)}{2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2} \ln e^{-4} = -2$$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ وحدها الأول $V_0 = 2$

ب)

$$V_n = \frac{(-4n+3) + 1}{2}$$

$$V_n = -2n + 2$$

$$S'_n = \frac{n+1}{2}(V_0 + V_n) = \frac{n+1}{2}(2 - 2n + 2)$$

$$S'_n = (n+1)(-n+2)$$

ج) لدينا: $\ln U_n = 2V_n - 1$

ومنه: $U_n = e^{2V_n - 1}$

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$$

$$P_n = e^{2V_0 - 1} \times e^{2V_1 - 1} \times \dots \times e^{2V_n - 1}$$

$$P_n = e^{2V_0 + 2V_1 + \dots + 2V_n \underbrace{-1 - 1 \dots - 1}_{(n+1) \text{ مرة}}}$$

$$P_n = e^{2(V_0 + V_1 + \dots + V_n) - 1(n+1)}$$

$$P_n = e^{2S'_n - n - 1} = e^{(n+1)(-2n+3)}$$

تمرين 4:

I - 1)

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$ لأن $\lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} [x(\ln x - 1) + 1] = +\infty$

2) $g'(x) = \ln x + \frac{x}{x} - 1 = \ln x$

إشارة $g'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
	‖	$-$	0	$+$	

$x > 1$: g متزايدة

$0 < x < 1$: g متناقصة

لما $x = 1$: $g'(1) = 0$ و $g(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

القيمة الحدية الصغرى لـ g هي 0

ومنه $g(x) \geq 0$:

x		1	
	$+$	0	$+$

II - 1) أ) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ ، لأن: $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

يوجد مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

ج) ندرس إشارة $f(x)$.

$f(x) = 0$ لما $\ln x = 1$ أي $x = e$

x	0		e	
	‖	$-$	0	$+$

$x > e$: (C) فوق (Ox).

$0 < x < e$: (C) تحت (Ox)

(C) يقطع (Ox) عند $(e;0)$

2) أ)

$f'(x) = e^x(\ln x - 1) + \frac{1}{x} \cdot e^x$

$f'(x) = e^x\left[\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right]$

$f'(x) = e^x\left(\frac{x\ln x - x + 1}{x}\right) = e^x \cdot \frac{g(x)}{x}$

ب) $g(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة على $\mathbb{R}_+^*$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

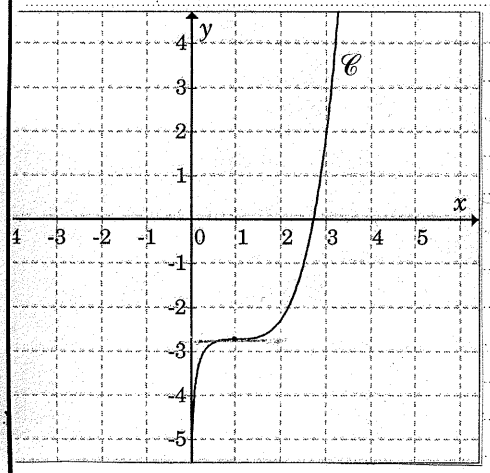
ج) بما أن $g(x)$ ينعدم دون تغيير الإشارة ومنه توجد نقطة انعطاف $(1;-e)$.

3) رسم (C):

$f(\frac{1}{2}) \simeq -2,7$

$f(2) \simeq -2,3$

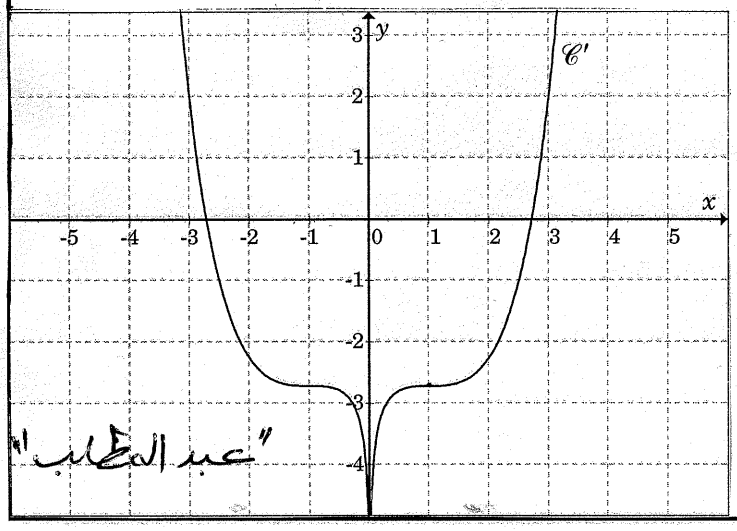
$f(3) \simeq 2$



4) $h(-x) = e^{|-x|}(\ln|-x| - 1) = e^{|x|}(\ln|x| - 1) = h(x)$

h زوجية. لما $x > 0$ ، (C') يطابق (C) ،

ولما $x < 0$ ، (C') يناظر (C) بالنسبة لـ (Oy).



"عبد المطلب"