الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**الفرض الثاني للفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2017/2016 المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (06نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطة M لاحقتها العدد المركب z، حيث $z=x+iy$، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب $z\neq 2-i$ العدد المركب Z حيث: $Z=\dfrac{z-6-2i}{z-2+i}$.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $Z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

2) أ) بيّن أنّ الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z=\dfrac{x^2+y^2-8x-y+10}{(x-2)^2+(y+1)^2}+i\,\dfrac{-3x+4y+10}{(x-2)^2+(y+1)^2}$.

ب) عيّن المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا.

جـ) عيّن المجموعة E_2 للنقط M من المستوي وعناصرها المميّزة حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

3) نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=6+2i$، $z_B=2-i$ و $z_C=3+6i$.

أ) بيّن أنّ $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) لتكن النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$. بيّن أنّ لاحقة D هي: $z_D=-1+3i$.

جـ) عيّن طبيعة الرباعي ABDC، والعناصر المميّزة للدائرة المحيطة به.

تمرين2 (06نقاط)

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(iz+3+\sqrt{3}\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+12\right)=0$.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+3i$، $z_B=\sqrt{3}-3i$، $z_C=\left(\sqrt{3}+3\right)i$ وليكن العدد المركب Z حيث $Z=\dfrac{z_A}{z_B+z_C}$.

1) أ) اكتب كل من: z_A، z_B، z_C و (z_B+z_C) على الشكل الأسي.

ب) بيّن أنّ: $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1438}+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{1438}=-1$.

2) أ) اكتب على الشكل الجبري وعلى الشكل المثلثي العدد المركب Z.

ب) عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 الذي من أجله يكون العدد Z^{n_0} حقيقيا سالبا، ثم احسب Z^{n_0}.

3) ليكن التحويل النقطي S من المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $(z'-z_A)=re^{i\theta}(z-z_A)$. ($r$ و θ عددين حقيقيين)

أ) عيّن العددين الحقيقيين r و θ حتى تكون النقطة B هي صورة النقطة C بالتحويل النقطي S.

ب) عيّن الطبيعة الهندسية والعناصر المميّزة للتحويل النقطي S.

اقلب الورقة

تمرين3 (08نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=2e^{x}+3x-2$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بيّن أنّ المنحني الممثل للدالة g يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب كتابة معادلته.

3) احسب $g'(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g.

4) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty\,;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^{2x}+(3x-5)e^{x}+4$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (فسّر النتيجة بيانيا) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

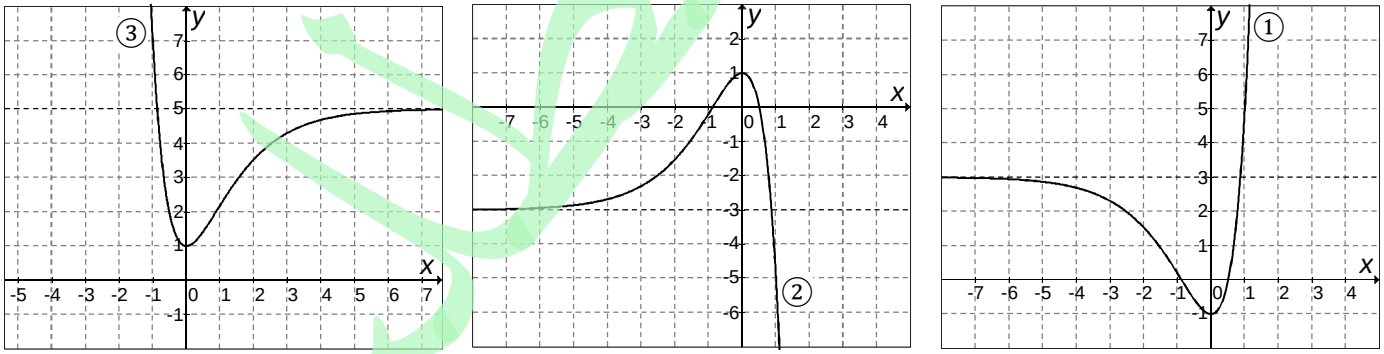
2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=e^{x}.g(x)$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة f' ، مع تحديد نقطة تقاطعهما.

4) احسب $f(-3)$ ، $f(-2)$ و $f(-1)$ و $f(1)$ ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

5) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $me^{-x}-e^{x}-3x+5=0$.

6) من بين المنحنيات الثلاثة ① ، ② و ③ المبيّنة أسفله، عيّن مع التبرير المنحني الممثّل للدالة $(1-f)$.



تصحيح الفرض 2 للفصل 2 : (2017)

تمرين 1 :

1) $\frac{z-6-2i}{z-2+i} = \frac{1+i}{2}$

$2z-12-4i = z-2+i+iz-2i-1$

$z(1-i) = 9+3i$

$z = \frac{9+3i}{1-i} = \frac{(9+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 3+6i$

2) أ) $Z = \frac{(x+iy-6-2i)(x-iy-2-i)}{(x+iy-2+i)(x-iy-2-i)}$

$Z = \frac{x^2+y^2-8x-y+10}{(x-2)^2+(y+1)^2} + i\,\frac{-3x+4y+10}{(x-2)^2+(y+1)^2}$

مع $(x;y) \neq (2;-1)$

ب) Z حقيقي : $-3x+4y+10=0$ و $(x;y) \neq (2;-1)$

E_1 : مستقيم معادلته : $-3x+4y+10=0$ باستثناء النقطة $(2;-1)$.

ج) Z تخيلي صرف : $x^2+y^2-8x-y+10=0$ ، $(x;y) \neq (2;-1)$

E_2 : $(x-4)^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$

دائرة مركزها $(4;\frac{1}{2})$ و نصف قطرها $\frac{5}{2}$ ، ماعدا $(2;-1)$

3) أ) $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = \frac{-4-3i}{-3+4i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = \frac{AB}{AC} = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = (\vec{AC};\vec{AB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ومنه (ABC) مثلث قائم ومتساوي الساقين.

ب) $z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = -3+4i$

العبارة المركبة $z' = z-3+4i$

$z_D = z_B-3+4i$ و منه $z_D = -1+3i$

ج) $z_B - z_A = z_D - z_C = -4-3i$

ومنه $\vec{AB} = \vec{CD}$

وسابقا لدينا : $AB = AC$ و $(\vec{AC},\vec{AB}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه : $ABDC$ مربع

لتكن I منتصف $[AD]$: $z_I = \frac{z_A+z_D}{2} = \frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$

$|z_A-z_I| = |z_B-z_I| = |z_C-z_I| = |z_D-z_I| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

مركز الدائرة هو I و نصف قطرها $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

تمرين 2 :

I) $iz+3+\sqrt{3}=0$

$z = \frac{-3-\sqrt{3}}{i} = \frac{(-\sqrt{3}-3)i}{i^2} = (3+\sqrt{3})i$

$z^2-2\sqrt{3}z+12=0$

$\Delta = -36i^2$ و منه : $z_1 = \sqrt{3}-3i$ و $z_2 = \sqrt{3}+3i$

II) 1) أ) $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_B = 2\sqrt{3}e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

$z_C = (\sqrt{3}+3)e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B+z_C = \sqrt{3}+\sqrt{3}i = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ب) $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1438} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1438} = e^{i\frac{1438\pi}{3}}$

$= e^{i(\frac{1437\pi+\pi}{3})} = e^{i(\pi+\frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{1438} = e^{i(-\frac{4\pi}{3})}$

$e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i(-\frac{4\pi}{3})} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = -1$

2) أ) $Z = \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$Z = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$Z = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$

$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ب) $Z^n = \sqrt{2}^n\left[\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}\right]$

Z^n حقيقي سالب : $\sin\frac{n\pi}{12}=0$ و $\cos\frac{n\pi}{12}<0$

$\frac{n\pi}{12} = \pi+2k\pi$ أي $n = 24k+12$ $(k\in\mathbb{N})$

$n_0 = 12$

$Z^{12} = \sqrt{2}^{12}e^{i\pi} = -64$

3) أ) $(z_B - z_A) = re^{i\theta}(z_C - z_A)$

$re^{i\theta} = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-6i}{-\sqrt{3}+\sqrt{3}i} = -\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

$re^{i\theta} = \sqrt{6}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

ب) S تشابه مباشر مركزه A ،

نسبته $\sqrt{6}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

تمرين 3:

I - 1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left[g(x) - (3x-2)\right] = \lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0$

ومنه: معادلة المستقيم المقارب المائل: $y = 3x-2$

3) $g'(x) = 2e^x + 3 > 0$

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4) $g(0) = 0$. إشارة $g(x)$:

$-$ 0 $+$

II - 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\cancelto{0}{e^x} + \cancelto{0}{3xe^x} - \cancelto{0}{5e^x} + 4\right) = 4$

ومنه (C) يقبل مستقيما مقاربا: $(y=4)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $f'(x) = 2e^{2x} + \left[3e^x + (3x-5)e^x\right]$

$f'(x) = e^x\left[2e^x + 3x - 2\right] = e^x . g(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ،

$x > 0$: $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما

$x < 0$: $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما

$x = 0$: $f'(0) = e^0 g(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) ندرس إشارة: $(f(x) - f'(x))$.

$f(x) - f'(x) = -e^{2x} - 3e^x + 4$

$= -(e^x - 1)(e^x + 4)$

$+$ 0 $-$

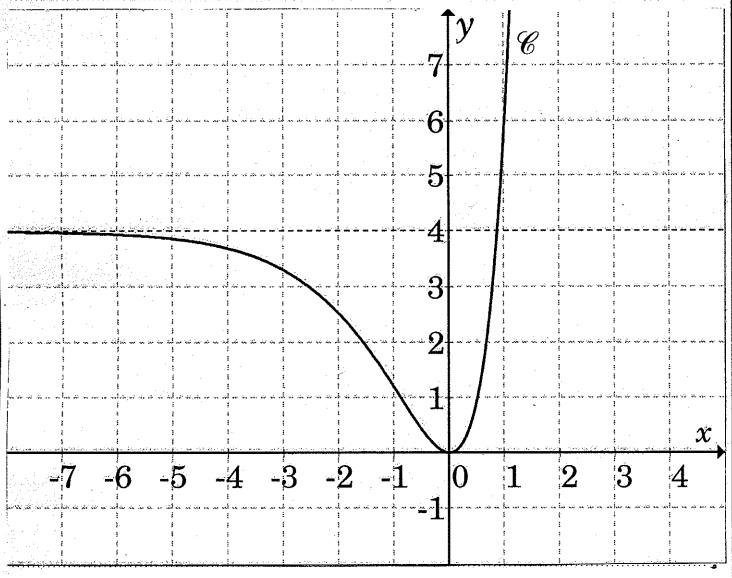
$x < 0$: (C) يقع أعلى (C') .

$x > 0$: (C) يقع أسفل (C') .

$x = 0$: (C) يقطع (C') عند $(0;0)$

4) $f(-3) \simeq 3,3$ ، $f(-2) \simeq 2,5$

$f(-1) \simeq 1,2$ و $f(1) \simeq 5,95$



5) $f(x) = m + 4$

$m+4 < 0$: $m < -4$ ، لا يوجد حلول

$m+4 = 0$: $m = -4$ ، حل مضاعف معدوم

$0 < m+4 < 4$: $-4 < m < 0$ ، حلان مختلفان في الإشارة

$m+4 \geq 4$: $m \geq 0$ ، حل وحيد موجب.

6) لرسم منحني $(-f)$ نناظر (C) بالنسبة لمحور الفواصل، ثم نقوم بانسحاب شعاعه $\binom{0}{1}$ لرسم منحني الدالة $(-f-1)$. ومنه المنحني الموافق هو ②

"عبد المطلب"