المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) — دورة: ماي 2017

الشعبة: علوم تجريبية — إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3سا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطة $A(1;2;-3)$، المستوي $(\mathscr{P})$ الذي معادلته الديكارتية $x-y+2z-11=0$، وسطح الكرة (S) التي مركزها النقطة A ونصف قطرها $r=3\sqrt{6}$.

1 - بيّن أنّ المستوي $(\mathscr{P})$ مماس لسطح الكرة (S).

2 - $(\mathscr{D})$ المستقيم الذي يشمل النقطة A والعمودي على المستوي $(\mathscr{P})$.

أ) بيّن أنّ المستقيم $(\mathscr{D})$ معرّف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+2 \\ z=2t-3 \end{cases}$، حيث t عدد حقيقي.

ب) استنتج إحداثيات النقطة B نقطة تماس المستوي $(\mathscr{P})$ مع سطح الكرة (S).

3 - بيّن أنّ مجموعة النقط M التي تحقّق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MB^2$ هي المستوي $(\mathscr{P})$.

4 - اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي $(\mathbb{Q})$ الذي يمس (S) عند النقطة C ويوازي $(\mathscr{P})$. عيّن إحداثيات النقطة C.

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

I - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلتين: $z^2-4z+6=0$ و $z^2-2(\sqrt{6}+2)z+10+4\sqrt{6}=0$

II - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A، B وC من هذا المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=2+i\sqrt{2}$ ، $z_B=2-i\sqrt{2}$ و $z_C=\sqrt{6}+2$.

1 - أ) اكتب على الشكل الأسي العددين المركبين: z_B-z_A و z_C-z_A.

ب) بيّن أنّ: $\left(\frac{z_B-z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2017}+\left(\frac{z_C-z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1437}=0$.

2 - أ) بيّن أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) استنتج أنّ النقطة C هي صورة النقطة B بتحويل نقطي f يطلب تعيينه وتحديد عناصره المميّزة.

جـ) بيّن أنّ لاحقة النقطة D حتى تكون B صورة D بالتحويل f هي $z_D=2-\sqrt{6}$.

3 - أ) عيّن بدقّة طبيعة الرباعي ADBC.

ب) عيّن صورة المثلث ADB بواسطة التحويل النقطي f.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=3$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}-1$.

1 - أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n\leq 3$.

ب) ادرس تغيرات المتتالية (u_n). استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2 - أ) انشر $\left(\sqrt{u_n+1}-1\right)^2$، ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$. استنتج نهاية المتتالية (u_n).

3 - (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln(u_n+1)$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n. تأكّد من النهاية المحصل عليها في **2 - ب)**.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+x-\ln x$

1 - احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2 - ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

3 - استنتج أنّ $g(x)>0$ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{\ln x}{x+1}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستو المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 - بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما $(\mathscr{D})$ معادلته $y=x$.

3 - ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم $(\mathscr{D})$.

4 - أثبت أنّه من أجل كل $x>0$ فإنّ $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{g(x)}{(x+1)^2}$، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f.

III - نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x+1-x\ln x$

1 - ادرس اتّجاه تغير الدالة h. لا يطلب حساب النهايات.

2 - بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3{,}5<\alpha<3{,}6$.

3 - أثبت أنّه من أجل كل $x>0$ فإنّ $f'(x)=1+\frac{h(x)}{x(x+1)^2}$.

4 - بيّن أنّ معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة α هي $y=x+\frac{1}{\alpha}$.

5 - أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $0{,}4<x_0<0{,}5$.

ب) ارسم المماس (Δ)، المستقيم $(\mathscr{D})$ والمنحني $(\mathscr{C})$.

جـ) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $e^{m(x+1)}-x=0$ حلين موجبين تماما.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

في الفضاء المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطتين $A(1;1;2)$ و $B(-1;3;0)$.

ليكن المستقيم $(\mathscr{D})$ المعرّف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=2t \\ y=t-1 \\ z=-t+1 \end{cases}$ ، حيث t عدد حقيقي.

1 - بيّن أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$ محور القطعة $[AB]$ هي: $x-y+z+1=0$.

2 - أ) بيّن أنّ المستقيم $(\mathscr{D})$ يوازي المستوي $(\mathscr{P})$.

ب) استنتج حساب المسافة بين المستقيم $(\mathscr{D})$ والمستوي $(\mathscr{P})$.

3 - أ) عيّن التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB).

ب) بيّن أنّ المستقيمين $(\mathscr{D})$ و (AB) ليسا من نفس المستوي.

4 - m وسيط حقيقي، و$(\mathbb{Q}_m)$ المستويات المعرّف بالمعادلة: $(m+1)x-2y+2mz-2(m+1)=0$.

أ) بيّن أنّ المستقيم $(\mathscr{D})$ محتوى في المستوي $(\mathbb{Q}_m)$.

ب) عيّن العدد الحقيقي m حتى يكون $(\mathscr{P})$ و $(\mathbb{Q}_m)$ متعامدين.

جـ) نضع $m=-1$. احسب المسافة بين المستقيمين $(\mathscr{D})$ و (AB).

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. من أجل كل نقطة M لاحقتها العدد المركب z، حيث $z\neq -1-2i$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z'، حيث: $z'=\dfrac{z-2i}{z+1+2i}$.

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z'=z-2i$.

2 - لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-1-2i$ ، $z_B=2i$ و $z_C=-2i$.

أ) عيّن المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون z' عددا حقيقيا.

ب) عيّن المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون z' عددا تخيليا صرفا.

3 - أ) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C ويحوّل A إلى O، مع تحديد نسبة وزاوية S.

ب) بيّن أنّ لاحقة النقطة D صورة O بالتحويل S هي $z_D=4-2i$.

جـ) عيّن خصائص (c') صورة الدائرة (c) المحيطة بالمثلث OAC بالتحويل S. أنشئ (c) و(c').

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في عملية إستيراد للأبقار، 60% من الأبقار مستوردة من البلد A (الحدث A)، و 40% من الأبقار مستوردة من البلد B (الحدث B). عند إجراء الفحوصات الطبية، تبيّن أنّ 95% من الأبقار المستوردة من البلد A سليمة و 80% من الأبقار المستوردة من البلد B سليمة.

نختار عشوائيا بقرة واحدة من هذا القطيع من الأبقار.

1 - احسب $P_A(\overline{S})$ احتمال أن تكون البقرة مريضة علما أنّها مستوردة من البلد A.

2 - أنشئ شجرة الاحتمالات.

3 - احسب $P(S)$ احتمال أن تكون البقرة سليمة.

4 - احسب $P_S(A)$ احتمال أن تكون البقرة مستوردة من البلد A علما أنّها سليمة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2e^{2x}-6e^{x}}{e^{x}+1}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (فسّر النتيجة هندسيا)، واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{2e^{x}(e^{x}-1)(e^{x}+3)}{(e^{x}+1)^{2}}$، ثم شكّل جدول تغيرات f.

2 - أ) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ مع حامل محور الفواصل.

ب) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

3 - أ) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $f(x)=ae^{x}+\dfrac{be^{x}}{e^{x}+1}$.

ب) λ عدد حقيقي سالب تماما. احسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C})$، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=\lambda$ و $x=\ln 3$، ثم عيّن نهاية $A(\lambda)$ لما $\lambda\to-\infty$.

4 - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{2e^{x}\left|e^{x}-3\right|}{e^{x}+1}$

أ) اكتب عبارة $g(x)$ دون استعمال رمز القيمة المطلقة ثم اشرح كيفية رسم المنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة g.

ب) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $g(x)=e^{m}$ ثلاثة حلول متمايزة.

5 - (u_n) و (v_n) المتتاليتان المعرّفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n=f(\ln n)$ و $v_n=u_n-\dfrac{8}{n+1}$.

أ) بيّن أنّ $v_n=\alpha n+\beta$، حيث α و β عددين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية، يطلب حساب أساسها وحدها الأول.

جـ) احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}$.

وفّقكم الله أعزائي الطلاب في البكالوريا

تصحيح البكالوريا التجريبي 2017

الموضوع 1

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $d(A,P)=\frac{|1-2-6-11|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{18}{\sqrt6}=3\sqrt6=r$

ومنه (P) مماس لـ (S).

2) أ) شعاع توجيه (D): $\vec u(1,-1,2)$

$\vec{AM}=t\vec u$ $\quad \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-t\\2t\end{pmatrix}$

ومنه: $(D):\begin{cases}x=t+1\\y=-t+2\\z=2t-3\end{cases}$

ب) B هي نقطة تقاطع (D) مع (P)

$(t+1)-(-t+2)+2(2t-3)-11=0$

$6t-18=0$ نجد $t=3$ ومنه $B(4,-1,3)$

3) $\vec{MA}\cdot\vec{MB}-\vec{MB}^2=0$

$\vec{MB}(\vec{MA}-\vec{MB})=0$ ومنه: $\vec{MB}\cdot\vec{BA}=0$

المستوي الذي يشمل B و (AB) ناظمي له وهو (P).

4) $(Q): x-y+2z+d=0$

$d(A,Q)=d(A,P)$ أي $\frac{|1-2-6+d|}{\sqrt6}=3\sqrt6$

نجد: $|-7+d|=18$

إما $d-7=18$ أو $d-7=-18$

$(Q): d=25$ أو $(P): d=-11$

ومنه: $(Q): x-y+2z+25=0$

C هي نظيرة B بالنسبة لـ A يعني أن النقطة A هي منتصف [BC]

$(x_A;y_A;z_A)=\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2};\frac{z_C+z_B}{2}\right)$

ومنه: $C(-2;5;-9)$

تمرين 2:

I- $z^2-4z+6=0$

$\Delta=-8=(\pm2\sqrt2 i)^2$

ومنه: $z_1=2-i\sqrt2$ و $z_2=2+i\sqrt2$

$z^2-2(\sqrt6+2)z+10+4\sqrt6=0$

$\Delta=0$ ومنه: $z_1=z_2=\sqrt6+2$

II- 1) أ) $z_B-z_A=-2\sqrt2 i=2\sqrt2 e^{i\frac{-\pi}{2}}$

$z_C-z_A=\sqrt6-i\sqrt2=2\sqrt2\,e^{i(-\frac{\pi}{6})}$

ب) $\left(\frac{z_B-z_A}{2\sqrt2}\right)^{2017}+\left(\frac{z_C-z_A}{2\sqrt2}\right)^{1437}=$

$\left[e^{i(-\frac{\pi}{2})}\right]^{2017}+\left[e^{i(-\frac{\pi}{6})}\right]^{1437}=$

$e^{i\left(\frac{-\pi-2016\pi}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{-1440\pi+3\pi}{6}\right)}=$

$e^{i(-\frac{\pi}{2})}+e^{i(\pi/2)}=-i+i=0$

2) أ) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt6-i\sqrt2}{-2\sqrt2 i}=\frac{\sqrt6 i+\sqrt2}{2\sqrt2}=\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\begin{cases}\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\vec{AB};\vec{AC})=\frac{\pi}{3}\end{cases}$

ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع

ب) $z_C-z_A=e^{i\pi/3}(z_B-z_A)$ ، $z'-w=e^{i\theta}(z-w)$

f دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ج) $z_B-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D-z_A)$

$z_D-z_A=\frac{-2\sqrt2 i}{\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}=-\sqrt6-\sqrt2 i$

ومنه: $z_D=-\sqrt6+2$

3) أ) $\begin{cases}z_D-z_A=z_B-z_C=-\sqrt6-\sqrt2 i\\ |z_C-z_A|=|z_B-z_C|\end{cases}$

ومنه ADBC معين. $(AC=BC \text{ و } \vec{AD}=\vec{CB})$

ب) $f(A)=A$ و $f(D)=B$ و $f(B)=C$

ومنه صورة ADB هو ABC.

تمرين 3:

1) أ) $n=0$: $0<U_0=3\leq3$ (محققة)

نفرض أن: $0<U_n\leq3$ ونبرهن $0<U_{n+1}\leq3$

$0<U_n\leq3$ أي $1<U_n+1\leq4$

$1<\sqrt{U_n+1}\leq2$ أي $0<\sqrt{U_n+1}-1\leq1$

ومنه $0<U_{n+1}\leq3$ إذن $0<U_n\leq3$ $n\in\mathbb{N}$

ب) $U_{n+1}-U_n=\sqrt{U_n+1}-1-U_n$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{(\sqrt{U_n+1}-1-U_n)(\sqrt{U_n+1}+1+U_n)}{(\sqrt{U_n+1}+1+U_n)}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2-U_n}{\sqrt{U_n+1}+1+U_n}<0$$ (متناقصة)

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

2) أ) $(\sqrt{U_n+1}-1)^2=U_n-2\sqrt{U_n+1}+2$

$$U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n=\sqrt{U_n+1}-1-\frac{U_n}{2}=\frac{-(U_n-2\sqrt{U_n+1}+2)}{2}$$

$U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n=-\frac{(\sqrt{U_n+1}-1)^2}{2}<0$ ومنه $U_{n+1}<\frac{1}{2}U_n$

ب) $n=0$: $U_0=3\leq 3(\frac{1}{2})^0=3$ محققة

نفرض أن $U_n\leq 3(\frac{1}{2})^n$ ونبرهن: $U_{n+1}\leq 3(\frac{1}{2})^{n+1}$

لدينا: $U_n\leq 3(\frac{1}{2})^n$ ومنه: $\frac{1}{2}U_n\leq 3(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^n$

سابقا $U_{n+1}\leq\frac{1}{2}U_n$ ومنه $U_{n+1}\leq 3(\frac{1}{2})^{n+1}$ إذن $U_n\leq 3(\frac{1}{2})^n$

$0<U_n\leq 3(\frac{1}{2})^n$ و $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$ إذن $\lim_{n\to+\infty}U_n=0$

3) أ) $V_{n+1}=\ln(U_{n+1}+1)=\ln(\sqrt{U_n+1})$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(U_n+1)=\frac{1}{2}V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية: $q=\frac{1}{2}$ و $V_0=2\ln 2$

ب) $V_n=V_0\cdot q^n=2\ln 2(\frac{1}{2})^n$ و $U_n=e^{V_n}-1$

$U_n=e^{2\ln 2(\frac{1}{2})^n}-1$ و $\lim_{n\to+\infty}U_n=1-1=0$.

تمرين 4:

I 1) $\lim_{x\to 0}g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x(x+1-\frac{\ln x}{x})=+\infty$

2) $g'(x)=2x+1-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)(2x-1)}{x}$

x	0		$0,5$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3/4+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

القيمة الحدية لـ g أكبر من 0 ومنه $g(x)>0$

II 1) $\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x[1+\frac{\ln x}{x(x+1)}]=+\infty$

2) $\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$: $x=0$ مستقيم مقارب لـ (C).

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$: $y=x$ مستقيم مقارب مائل

3) $f(x)-y=\frac{\ln x}{x+1}$

x	0		$+1$		
		$-$	0	$+$	
		(C) تحت (D)	$(1,1)$	(C) فوق (D)	

4) $f'(x)=1+\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}=\frac{x(x+1)^2+x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{(x+1)(x^2+x+1)-x\ln x}{x(x+1)^2}=\frac{x^2+(x+1)}{x(x+1)}-\frac{x\ln x}{x(x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}-\frac{\ln x}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{x^2+x-\ln x}{(x+1)^2}$

$f'(x)=(\frac{1}{x}+\frac{g(x)}{(x+1)^2})>0$ ومنه f متزايدة تماما

III 1) $h'(x)=-\ln x$

x	0		1	
		$+$	0	$-$

h متزايدة $0<x<1$ ؛ h متناقصة $x>1$

$h(1)=2$ و $h'(1)=0$

2) h مستمرة ومتناقصة على $]3,5;3,6[$ و $h(3,5)=0,17>0$ و $h(3,6)=-0,01<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $3,5<\alpha<3,6$.

3) $f'(x)=1+\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$

4) $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ ؛ $f'(\alpha)=1+\frac{h(\alpha)}{\alpha(\alpha+1)^2}=1$

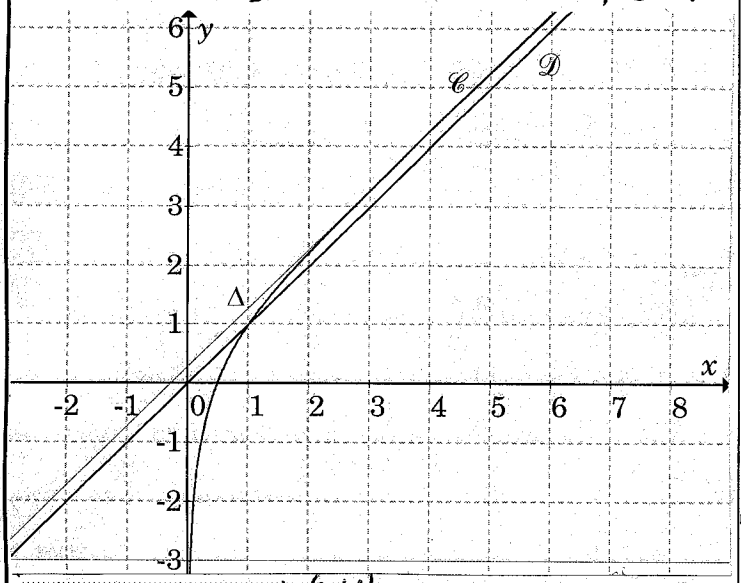
و $f(\alpha)=\alpha+\frac{\ln\alpha}{\alpha+1}$ ومنه $y=x+\frac{\ln\alpha}{\alpha+1}$

لدينا: $h(\alpha)=0$ أي $\alpha+1-\alpha\ln\alpha=0$ ومنه $\ln\alpha=\frac{\alpha+1}{\alpha}$

إذن: $y=x+\frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}=x+\frac{1}{\alpha}$

5) أ) f مستمرة ومتزايدة على $]0,4;0,5[$ و $f(0,4)=-0,25<0$ و $f(0,5)=0,047>0$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا أي (C) يقطع محور الفواصل عند نقطة فاصلتها x_0 حيث $0,4<x_0<0,5$.

ب) رسم (Δ) ، (D) و المنحني (C).



جـ) $e^{m(x+1)}=x$

$(x>0)$ $m(x+1)=\ln x$

$m=\frac{\ln x}{x+1}$

$x+m=x+\frac{\ln x}{x+1}=f(x)$

حلول المعادلة $e^{m(x+1)}-x=0$ هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيم $y=x+m$.

$0<m<\frac{1}{\alpha}$

"عبد المطلب"

تصحيح الامتحان التجريبي 2017

الموضوع 2 "عبد المطلب"

تمرين 1:

1) لتكن I منتصف [AB]. $I(0,2,1)$

الشعاع الناظمي لـ (P): $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{AB}=-2\vec{n}$ و $I\in(P)$ ومنه محققة

3) أ) $\vec{AM}=\alpha\vec{AB}$ حيث $(\alpha\in\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

نجد: $\begin{cases}x=-2\alpha+1\\y=2\alpha+1\\z=-2\alpha+2\end{cases}$ أو $(AB):\begin{cases}x=\alpha+1\\y=-\alpha+1\\z=\alpha+2\end{cases}$

ب) $\begin{cases}2t=\alpha+1 & (1)\\t-1=-\alpha+1 & (2)\\-t+1=\alpha+2 & (3)\end{cases}$

من (1) و (2) ينتج $\alpha=1$ و $t=1$

نعوض في (3) مستحيل

ومنه (D) و (AB) ليسا من المستوي نفسه

2) أ) $\vec{u}_D\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}_D\cdot\vec{n}=0$ ومنه $(D)//(P)$.

ب) $d(D;P)=\dfrac{|2t-t+1-t+1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt3}=\sqrt3$

4) أ) $(m+1)(2t)-2(t-1)+2m(-t+1)-2m-2=0$

$0=0$ محققة ومنه (D) محتوى في (P)

ب) $\vec{n}_{(P)}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{n}_{(Q)}\begin{pmatrix}m+1\\-2\\2m\end{pmatrix}$

(P) يعامد (Q_m): $\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(Q)}=3m+3=0$

ومنه $m=-1$

ج) $Q_{-1}: -2y-2z=0$ أو $y+z=0$

$$d((AB);(D))=d((AB);(Q_{-1}))=\frac{|0-\alpha+1+\alpha+2|}{\sqrt{1+1}}$$

$$d((AB);(D))=\frac{3}{\sqrt2}=\frac{3\sqrt2}{2}$$

تمرين 2:

1) $\dfrac{z-2i}{z+1+2i}=z-2i$

$(z-2i)(z+2i)=0$

ومنه: $z_1=2i$ و $z_2=-2i$

2) لدينا: $z'=\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$

أ) z' حقيقي: $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=k\pi$

$(\vec{AM},\vec{BM})=k\pi$: E_1 المستقيم (AB) ماعدا A.

ب) z' تخيلي صرف: $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

E_2: دائرة قطرها [AB] باستثناء A.

3) أ) $z'-w=a(z-w)$

$z_O-z_C=a(z_A-z_C)$

$a=\dfrac{z_O-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{2i}{-1}=-2i$

ومنه: $\dfrac{b}{1-a}=z_C=-2i$ و $b=4-2i$

$S: z'=-2iz+4-2i$

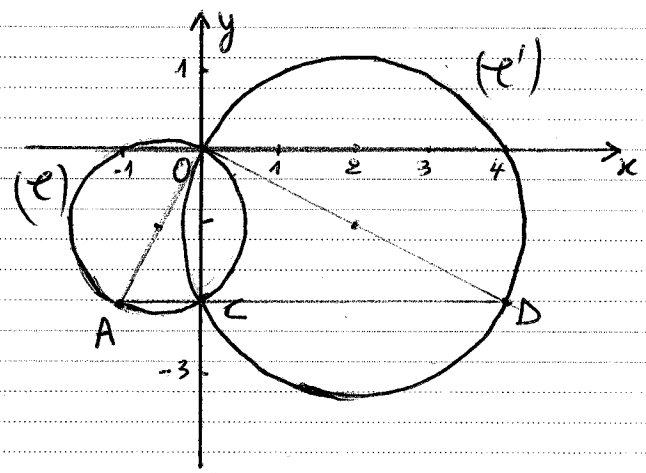
تشابه ع و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.

ب) $z_D=-2i(z_O)+4-2i=4-2i$

ج) $S(C)=C$ ، $S(A)=O$ ، $S(O)=D$

(C') هي الدائرة المحيطة بالمثلث DOC.

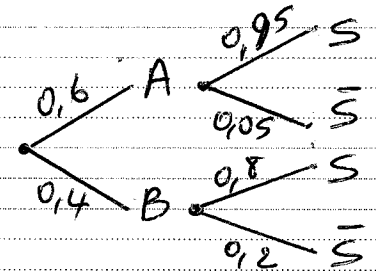
(C) قطرها [OA] و (C') قطرها [OD].



تمرين 3:

1) $P_A(\bar{S}) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

2)



3) $P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S)$

$P(S) = P_A(S) \times P(A) + P_B(S) \times P(B)$

$= (0{,}95 \times 0{,}6) + (0{,}8 \times 0{,}4) = 0{,}89$

4) $P_S(A) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}95 \times 0{,}6}{0{,}89} \simeq 0{,}64$

تمرين 4:

1) أ) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، $y = 0$ مستقيم مقارب

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x(2e^x - 6)}{e^x(1 + e^{-x})} = +\infty$

ب) $f'(x) = \dfrac{2e^{3x} + 4e^{2x} - 6e^x}{(e^x + 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2e^x(e^{2x} + 2e^x - 3)}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{2e^x(e^x - 1)(e^x + 3)}{(e^x + 1)^2}$

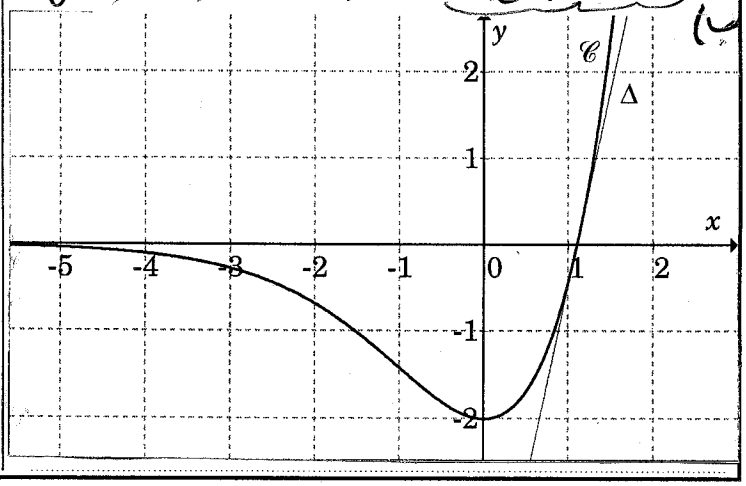
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$

2) أ) $f(x) = 0$: $2e^x(e^x - 3) = 0$

$e^{x_0} = 3$ ومنه $x_0 = \ln 3$

$y = f'(\ln 3)(x - \ln 3) + 0 = \dfrac{9}{2}(x - \ln 3)$

ب)



3) أ) $f(x) = a e^x + \dfrac{b e^x}{e^x + 1} = \dfrac{a e^{2x} + (a+b) e^x}{(e^x + 1)}$

بالمطابقة مع $f(x)$ نجد: $a = 2$ و $b = -8$

ب) $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{\ln 3} -f(x)\,dx = \int_{\ln 3}^{\lambda} f(x)\,dx$

$A(\lambda) = \int_{\ln 3}^{\lambda} \left(2e^x - 8\dfrac{e^x}{e^x + 1}\right) dx$

$A(\lambda) = \left[2e^x - 8\ln(e^x + 1)\right]_{\ln 3}^{\lambda}$

$A(\lambda) = 2e^{\lambda} - 8\ln(e^{\lambda} + 1) - 6 + 8\ln 4$

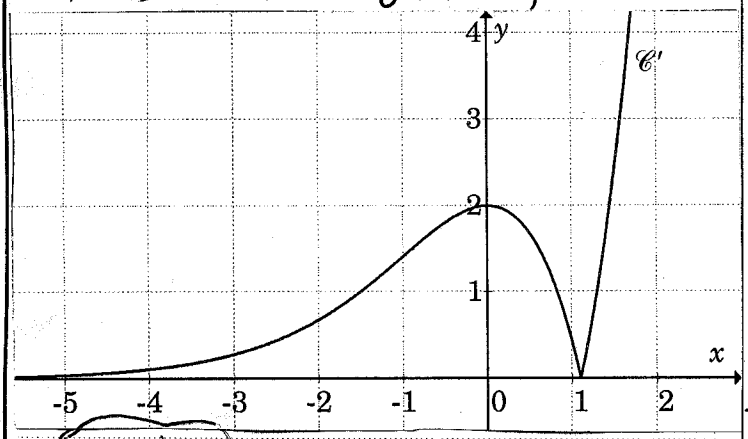
$\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = 16\ln 2 - 6$

4) أ) إشارة $(e^x - 3)$

$\ln 3$: $-$ | 0 | $+$

$x > \ln 3$: $g(x) = f(x)$ $(\mathscr{C}')$ يطابق $(\mathscr{C})$

$x < \ln 3$: $g(x) = -f(x)$ $(\mathscr{C}')$ يناظر $(\mathscr{C})$ / xx'



ب) $0 < e^m < 2$ ومنه $m < \ln 2$

5) أ) $U_n = f(\ln n) = \dfrac{2e^{\ln(n^2)} - 6e^{\ln n}}{e^{\ln n} + 1}$

$U_n = \dfrac{2n^2 - 6n}{n + 1}$

$v_n = \dfrac{2n^2 - 6n}{n + 1} - \dfrac{8}{n + 1} = \dfrac{2(n^2 - 3n - 4)}{n + 1}$

$v_n = \dfrac{2(n+1)(n-4)}{n + 1} = 2n - 8$

ومنه $\alpha = 2$ و $\beta = -8$

ب) $v_{n+1} - v_n = 2$ ، $r = 2$ و $v_0 = -8$

جـ) $P_n = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{\frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)}$

$P_n = e^{(n+1)(n-8)}$

"عبد المطلب"