الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**فرض** **الفصل الثالث**	الموسم الدراسي: 2017/2016 المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (6نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول $u_0 = 9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{2}$.

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$، نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$y = x$ و $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

1) أ) ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ').

ب) مثّل على المحور $(O; \vec{i})$ الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4، دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

جـ) خمّن تغيرات المتتالية (u_n) ونهايتها.

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > -3$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنّها متقاربة.

جـ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3\left(2^{-n+2} - 1\right)$، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

3) (v_n) و (w_n) المتتاليتان المعرّفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2u_n + 6$ و $w_n = \ln(u_n + 3)$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية وأنّ المتتالية (w_n) حسابية، يطلب حساب أساس كل منهما.

ب) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = e^{w_0} + e^{w_1} + \ldots + e^{w_n}$.

تمرين2 (5نقاط)

كيس يحتوي على ست كريات مرقمة من 0 إلى 5، اثنتان منها زرقاوان والكريات الباقية خضراء. نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

1) احسب احتمال سحب كرية واحدة خضراء.

2) احسب احتمال سحب ثلاث كريات خضراء.

3) احسب احتمال سحب ثلاث كريات من لونين مختلفين.

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب الكرية التي تحمل أكبر ترقيم من بين الكريات الثلاثة المسحوبة.

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

ب) بين أنّ الأمل الرياضياتي $E(X) = 4{,}25$.

تمرين3 (09نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x-6+e^{x}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(-2x+4)e^{-x}+x$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (نُذكّر أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$)

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\mathscr{D})$ معادلته $y=x$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{D})$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا (Δ) يوازي المستقيم $(\mathscr{D})$. اكتب معادلة المماس (Δ).

جـ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثيتها.

3) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha-3}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) ارسم المستقيم المقارب $(\mathscr{D})$ والمنحني $(\mathscr{C})$. اعتبر $f(\alpha)\approx 1,7$.

4) أ) بيّن أنّ الدالة العددية H المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x)=(-x-1)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة العددية h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=xe^{-x}$.

ب) احسب مساحة السطح S المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ والمستقيمات المعرّفة بالمعادلات: $x=2$ ، $x=3$ و $y=x$.

III- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2<u_n\le 3$.

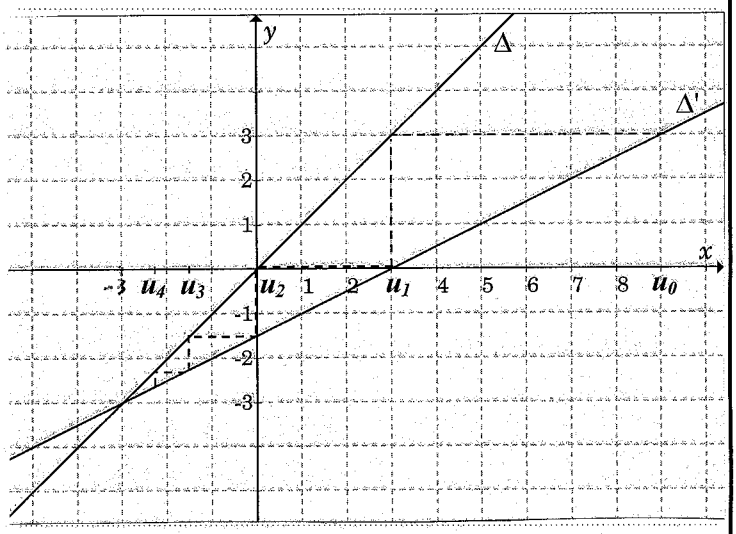
2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

تصحيح فرض الفصل الثالث 2017

تمرين 1:

1) أ) و ب)



ج) (U_n) متناقصة ومتقاربة نحو -3.

2) أ) $n=0$; $U_0 = 9 > -3$ (محققة)

* نفرض أن $U_n > -3$ ونبرهن صحة $U_{n+1} > -3$

لدينا: $U_n > -3$ أي $U_n - 3 > -6$ ،

$\frac{U_n - 3}{2} > \frac{-6}{2}$ ومنه $U_{n+1} > -3$ (محققة)

إذن $U_n > -3$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ب) $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - 3}{2} - U_n$

$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n - 3}{2} = \frac{-(U_n+3)}{2}$

لدينا $U_n > -3$ ومنه $U_n + 3 > 0$

إذن $-(U_n+3) < 0$ ومنه (U_n) متناقصة

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

ج) $n=0$; $U_0 = 3(4-1) = 9$ (محققة)

* نفرض أن $U_n = 3(2^{-n+2} - 1)$ ونبرهن صحة: $U_{n+1} = 3(2^{-n+1} - 1)$.

لدينا $U_n = 3(2^{-n+2} - 1)$ و $U_{n+1} = \frac{U_n - 3}{2}$

$U_{n+1} = \frac{3(2^{-n+2} - 1) - 3}{2} = \frac{3 \cdot 2^{-n+2} - 6}{2}$

$U_{n+1} = 3 \cdot 2^{-n+1} - 3$ (محققة)

إذن: $U_n = 3(2^{-n+2} - 1)$ من أجل $n \in \mathbb{N}$.

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} (3 \cdot 2^{-n+2} - 3) = -3$

3) أ) * $V_{n+1} = 2U_{n+1} + 6 = 2\left(\frac{U_n - 3}{2}\right) + 6$

$V_{n+1} = U_n + 3 = \frac{1}{2}(2U_n + 6) = \frac{1}{2} V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$W_{n+1} = \ln(U_{n+1} + 3) = \ln\left(\frac{U_n - 3}{2} + 3\right)$ *

$W_{n+1} = \ln\left(\frac{U_n + 3}{2}\right) = \ln(U_n + 3) - \ln 2$

$W_{n+1} = W_n - \ln 2$

ومنه (W_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 2$

ب) لاحظ أن $W_n = \ln\left(\frac{V_n}{2}\right)$

$S_n = e^{\ln\left(\frac{V_0}{2}\right)} + e^{\ln\left(\frac{V_1}{2}\right)} + \dots + e^{\ln\left(\frac{V_n}{2}\right)}$

$S_n = \frac{V_0}{2} + \frac{V_1}{2} + \dots + \frac{V_n}{2} = \frac{V_0 + V_1 + \dots + V_n}{2}$

$S_n = \frac{24}{2}\left[\frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right] = 24\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

تمرين 2

1) $P_1 = \frac{C_4^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \frac{4}{20} = 0,2$

2) $P_2 = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = 0,2$

3) $P_3 = 1 - P_2 = 0,8$

4) أ) و ب)

X	2	3	4	5
P(X)	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$

$E(X) = \frac{2}{20} + \frac{9}{20} + \frac{24}{20} + \frac{50}{20} = \frac{85}{20} = 4,25$

تمرين 3 :

I-1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $g'(x) = 2 + e^{x} > 0$ و منه g متزايدة تماما

3) g مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$. $g(1,2) = -0,08$ و $g(1,3) = 0,87$. $g(1,2)\times g(1,3) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$.

إشارة $g(x)$:

x		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

II-1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(-2x+4+\cancelto{0}{xe^{x}}) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-\cancelto{0}{2xe^{-x}} + \cancelto{0}{4e^{-x}} + x) = +\infty$

ب) $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} [-2xe^{-x}+4e^{-x}] = 0$

ومنه: $y=x$ (D) مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$

$f(x) - y = (-2x+4)e^{-x}$

$-\infty$		2		$+\infty$
	$+$		$-$	
	(C) فوق (D)	بقطع $(2,2)$	(C) تحت (D)	

2) أ) $f'(x) = e^{-x}(2x-6)+1 = \dfrac{2x-6+e^{x}}{e^{x}}$

$f'(x) = e^{-x}(g(x))$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) $f'(x_0) = 1$ ؛ $e^{-x_0}(2x_0-6)+1 = 1$

ومنه $x_0 = 3$. $(\Delta): y = x - 2e^{-3}$

ج) $f''(x) = e^{-x}(-2x+8)$

	4	
$+$	0	$-$

$A(4; 4-4e^{-4})$

3) أ) $g(\alpha) = 0$ منه $e^{\alpha} = -2\alpha+6$

$f(\alpha) = \dfrac{-2\alpha+4}{e^{\alpha}} + \alpha = \dfrac{-2\alpha+4}{-2\alpha+6} + \alpha$

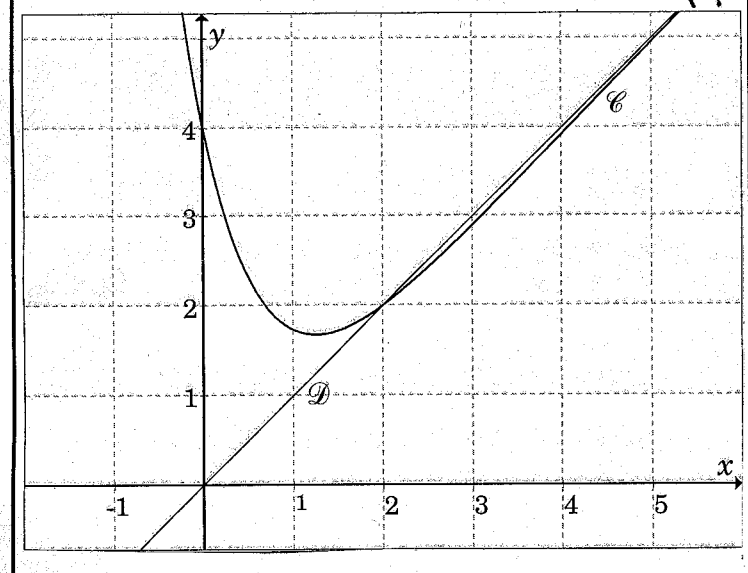
$f(\alpha) = \dfrac{-\alpha+2}{-\alpha+3} + \alpha = \dfrac{1}{\alpha+3} + \alpha + 1$

$-1,8 < \alpha-3 < -1,7$ ؛ $1,2 < \alpha < 1,3$

$\dfrac{1}{-1,7} < \dfrac{1}{\alpha-3} < \dfrac{1}{-1,8}$ ؛ $0,41 < 1+\dfrac{1}{\alpha-3} < 0,44$

ومنه: $1,61 < f(\alpha) < 1,74$

ب)



4) أ) $H'(x) = -e^{-x} - e^{-x}(-x-1) = xe^{-x}$

ب) $S = \int_2^3 (y - f(x))\,dx = \int_2^3 [2xe^{-x} - 4e^{-x}]\,dx$

$S = 2[H(x)]_2^3 + 4[e^{-x}]_2^3 = 2[(-x+1)e^{-x}]_2^3$

$S = 2(-2e^{-3}+e^{-2})$ u.a

III-1) $n=0$: $2 < U_0 = 3 \leq 3$ (محققة)

نفرض أن: $2 < U_n \leq 3$ ونبرهن صحة: $2 < U_{n+1} \leq 3$. لدينا $U_{n+1} = f(U_n)$ و f متزايدة على $]2,3]$ ومنه:

$f(2) = 2 < f(U_n) \leq f(3) = 2,9 < 3$

إذن $2 < U_{n+1} \leq 3$ ومنه $2 < U_n \leq 3$.

2) لدينا سابقا $f(x) < x$ من أجل $x > 2$ ومنه: $f(U_n) < U_n$ أي $U_{n+1} < U_n$ من أجل $2 < U_n \leq 3$. ومنه (U_n) متناقصة تماما.

3) (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل، فهي متقاربة نحو ℓ .

$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

عند حل المعادلة: $f(\ell) = \ell$ نجد: $\ell = 2$

"عبد المطلب"