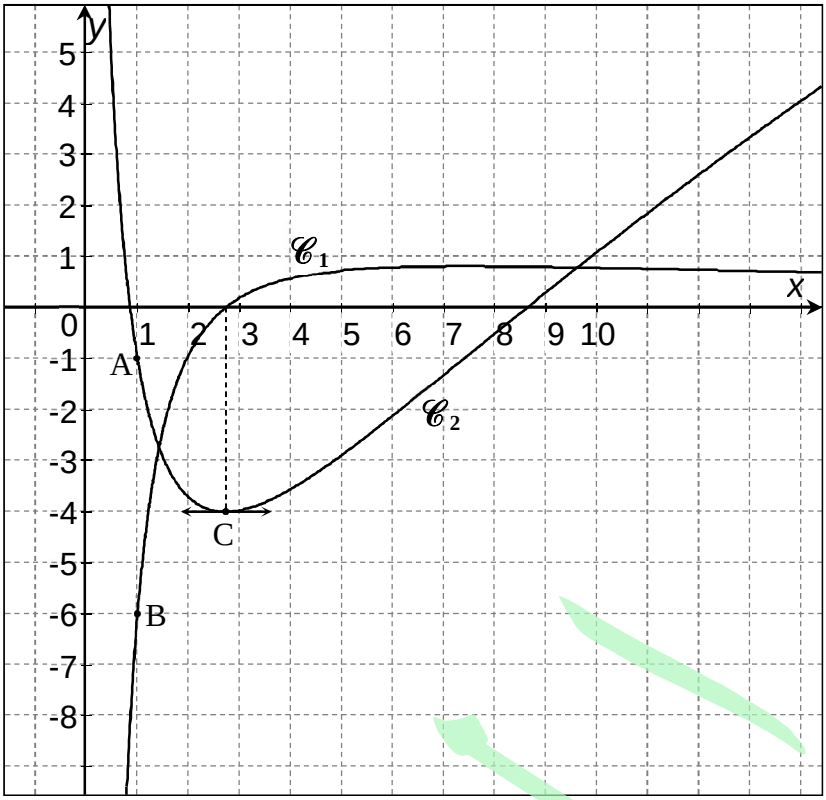
الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الأول**	الموسم الدراسي: 2018/2017م المدة: ساعتان ونصف (2سا 30د) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (6نقاط)



لتكن f الدالة القابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$، والدالة f' هي مشتقة الدالة f.

$\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ منحنيين مبينين في الشكل المقابل، أحد هذين المنحنيين يمثل f والآخر يمثل f'.

A ، B و C ثلاث نقاط حيث: $A(1;-1)$، $B(1;-6)$ و $C(e;-4)$. المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب لكل من المنحنيين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$.

1) أثبت أنّ المنحني $\mathscr{C}_2$ هو الممثل للدالة f.

2) عيّن بيانيا النهايات التالية: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{f(x)}$، $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}$ و $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

3) اكتب معادلة المماس لـ $\mathscr{C}_2$ عند النقطة A.

4) a ، b و c أعدادا حقيقية، ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ نضع: $f(x)=a(\ln x)^2+b\ln x+c$.

بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ: $f'(x)=\dfrac{2a\ln x+b}{x}$، ثم عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c.

5) نفرض في ما يلي أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ فإنّ: $f(x)=3(\ln x)^2-6\ln x-1$.

أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ج) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0;2\pi]$ بـ: $g(x)=f(e^{\sin x})$. احسب $g'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات g.

تمرين2 (6نقاط)

I- لتكن الدالة g المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x^2-1)\sqrt{x^2-1}-3$.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$، $g'(x)=3x\sqrt{x^2-1}$. استنتج أنّ g متزايدة على $[1;+\infty[$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,7\,;1,8]$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $[1;+\infty[$.

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-3+\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$، فسّر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$. استنتج أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب كتابة معادلته.

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $x-\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ ، استنتج إشارة $\left(f(x)-x\right)$ ثم ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

4) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha^3-3$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) ارسم المستقيم المقارب المائل (Δ) و المنحني $(\mathscr{C})$. نأخذ $f(\alpha)\approx 2{,}4$.

<u>تمرين3</u> (8نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^x-2x$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) استنتج أنّ $g(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$.

4) بيّن أنّ المنحني الممثل للدالة g يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=-2x$ بجوار $-\infty$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x-2x}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، فسّر النتيجة هندسيا، ثم بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

ب) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\dfrac{x}{2}\right]=-1$. استنتج أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D)، اكتب معادلته.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{(1-x^2)(e^x+2)}{(e^x-2x)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$ ثم ارسم (D)، (Δ) و $(\mathscr{C})$.

3) استعمل $(\mathscr{C})$ لتعيين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(-x)=\dfrac{x}{2}+m$ حلا واحدا موجبا تماما.

4) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} h(x)=g(x) & x\le 0 \\ h(x)=f(x) & x>0 \end{cases}$

أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=-1$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{1}{e^x-2x}\left[x+4-\dfrac{e^x-1}{x}\right]=3$. ماذا تستنتج؟

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة h ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h ونصفي المماسين لـ$(\mathscr{C}')$ عند $x_0=0$.

تصحيح إختبار الفصل الأول 2017

تمرين 1:

1) $0<x\leq e$: $f'(x)\leq 0$ و f متناقصة

ولما $x>e$: $f'(x)\geq 0$ و f متزايدة تماما

ومنه (C_f) هو منحنى الدالة f.

2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=0$ لأن $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-6$$

3) $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-6x+5$

4) $f'(x)=2a\frac{\ln x}{x}+\frac{b}{x}=\frac{2a\ln x+b}{x}$

$$\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(e)=-4 \\ f'(1)=-6 \end{cases} \text{ نجد: } \begin{cases} c=-1 \\ a+b+c=-4 \\ \frac{b}{1}=-6 \end{cases}$$

ومنه $a=3$ و $b=-6$ و $c=-1$

5) أ) $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln x(3\ln x-6)-1=+\infty$$

ب) $f'(x)=\frac{6\ln x-6}{x}$

$f'(x)=0$ لما $\ln x=1$ ومنه $x=e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

6) أ) $g(x)=f(e^{\sin x})=3(\ln e^{\sin x})^2-6\ln e^{\sin x}-1$

$$g(x)=3(\sin x)^2-6\sin x-1$$

$$g'(x)=6\cos x\cdot\sin x-6\cos x$$

$$g'(x)=6\cos x(\sin x-1)$$

$g'(x)=0$ لما $\sin x=1$ أي $x=\frac{\pi}{2}$ أو $\cos x=0$ أي $x=\frac{\pi}{2}$ أو $x=\frac{3\pi}{2}$

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
$\sin x-1$		$-$	0	$-$		$-$	
$6\cos x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	8	$\searrow$	-1

تمرين 2:

I-1) $g'(x)=2x\sqrt{x^2-1}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(x^2-1)$

$$g'(x)=\frac{3x^3-3x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{3x(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

$g'(x)=3x\sqrt{x^2-1}>0$ ومنه g متزايدة

2) g مستمرة ومتزايدة على $[1,7;1,8]$،

$g(1,7)\simeq -0,4<0$ و $g(1,8)\simeq 0,4>0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

إشارة $g(x)$:

x	1		α		
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II-1) $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$: $x=1$ مستقيم مقارب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-3+\frac{3x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x-3+\frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right]=+\infty$$

2) $f'(x)=1+\frac{3\sqrt{x^2-1}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot 3x}{x^2-1}$

$$f'(x)=1+\frac{-3}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{\overbrace{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}-3}^{g(x)}}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-3+\frac{3x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right]=-3+3=0$

ومنه $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

ب) $x-\sqrt{x^2-1}=\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$f(x)-y=\frac{3(x-\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{3}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})}>0$ ((C) فوق (Δ))

4) أ) لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $(\alpha^2-1)\sqrt{\alpha^2-1}-3=0$

$\sqrt{\alpha^2-1}=\frac{3}{\alpha^2-1}$ نعوضها في $f(\alpha)$

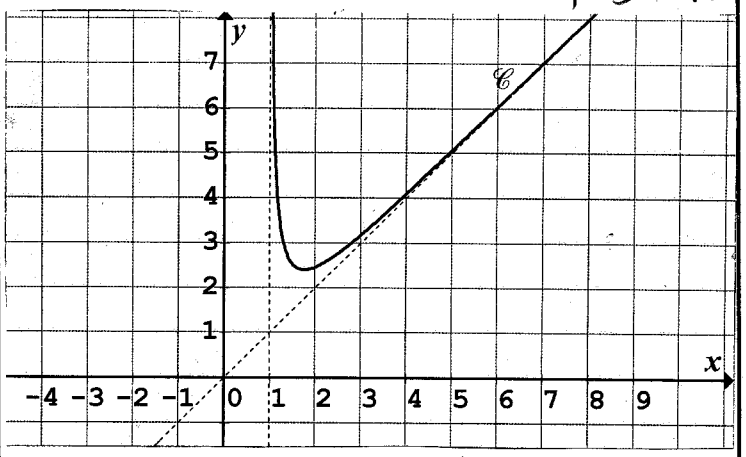
$$f(\alpha)=\alpha-3+\frac{3\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}=\alpha-3+\frac{3\alpha}{\frac{3}{\alpha^2-1}}$$

$$f(\alpha)=\alpha-3+\alpha(\alpha^2-1)=\alpha^3-3$$

$1,7<\alpha<1,8$ ، $4,9<\alpha^3<5,8$ ومنه

$1,9<\alpha^3-3<2,8$

ب) الرسم :



تمرين 3 :

I - 1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 2\right) = +\infty$$

2) $g'(x) = e^x - 2$

$g'(x)=0$ لما $e^x = 2$ ومنه $x = \ln 2$

3) $(2 - 2\ln 2) > 0$

ومنه $g(x) > 0$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$2-2\ln 2$	↗	$+\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}(g(x) - y) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

II - 1) أ)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{2}{x}\right)} = 0$$

$y=0$ مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C})$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x} - 2\right)} = +\infty$$

ب)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x + 4x + 2}{2(e^x - 2x)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(e^x + 4 + \frac{2}{x}\right)}{2x\left(\frac{e^x}{x} - 2\right)} = \frac{4}{-4} = -1$$

ومنه $y = -\frac{x}{2} - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$

2) أ)

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(e^x - 2x) - (e^x - 2)(x+1)^2}{(e^x - 2x)^2}$$

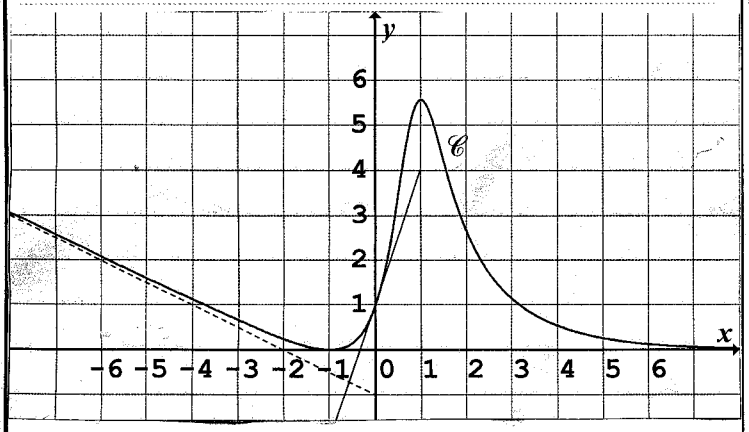
$$f'(x) = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 2x + 2)}{(e^x - 2x)^2} = \frac{(x+1)(1-x)(e^x + 2)}{(e^x - 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x^2)(e^x + 2)}{(e^x - 2x)^2}$$

إشارتها من إشارة $(1-x^2)$ لأن $e^x + 2 > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e-2}$	↘	0

ب) المماس (Δ) : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 3x + 1$



3) طريقة 1 : المعادلة $f(-x) = \frac{x}{2} + m$ تكافئ $f(x) = \frac{-x}{2} + m$ تقبل حلا واحدا سالبا تماما ومنه

$-1 < m < 1$ إذا : نرسم المستقيم $y = \frac{-x}{2} + 1$

طريقة 2 : نرسم منحنى الدالة $f(-x)$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب ونناظر (د) ثم نناقش.

4) أ)

$$\lim_{x\to0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x - 2x - 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} - 2 = -1$$

ب)

$$\lim_{x\to0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{(x+1)^2}{e^x - 2x} - 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{x^2 + 4x + 1 - e^x}{x(e^x - 2x)}$$

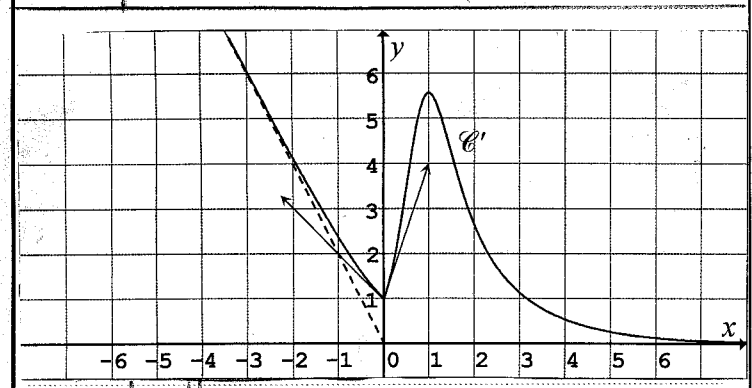
$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{e^x - 2x}\left(\frac{x^2 + 4x}{x} + \frac{1 - e^x}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{e^x - 2x}\left(x + 4 - \frac{e^x - 1}{x}\right) = 3$$

ومنه h غير قابلة للاشتقاق عند 0

ب)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$\frac{4}{e-2}$	↘	0



عبد المطلب