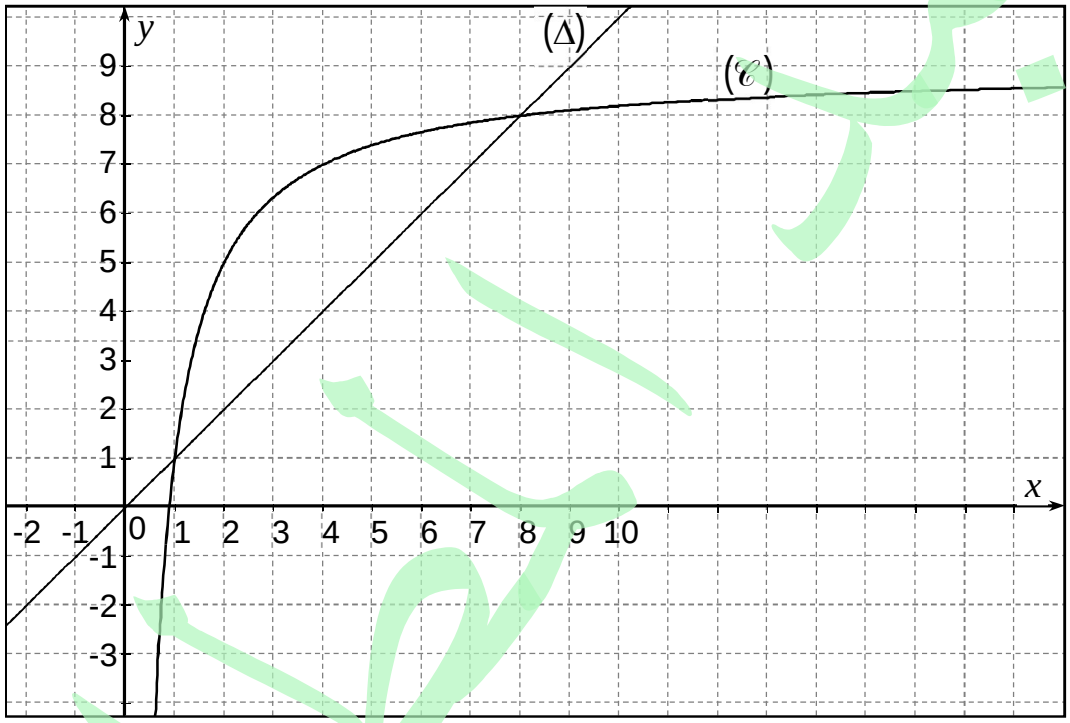
الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**الفرض الأول للفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2018/2017 المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (6نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر المستقيم (Δ) معادلته $y=x$ والمنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9x-8}{x}$. في الوثيقة المرفقة رسم كل من (Δ) و $(\mathscr{C})$.



(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أ) مثّل على المحور $(O;\vec{i})$ في الوثيقة المرفقة، الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3، دون حسابها، مبرزا خطوط الرسم.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) ونهايتها.

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 8$. يمكن كتابة $f(u_n)$ على الشكل $9-\dfrac{8}{u_n}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنّها متقاربة.

جـ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\dfrac{7}{6\times 2^{-3n}+1}$، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $v_n=\dfrac{u_n-8}{u_n-1}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{8}$، ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n=\dfrac{1}{u_0-1}+\dfrac{1}{u_1-1}+\dots+\dfrac{1}{u_n-1}$.

تمرين2 (4,5نقطة)

1) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $h(x)=x-\ln(x+2)$

أ) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة h ، ثم شكّل جدول تغيراتها. (لا يطلب حساب النهايات)

ب) استنتج أنّه إذا كان $x\in[-1;0]$ فإنّ $h(x)\in[-1;0]$.

جـ) ادرس إشارة $h(x)-x$.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=0$ و $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n+2)$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1\le u_n\le 0$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

تمرين3 (9,5نقطة)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x+1)(x-1+e^{-x})$

1) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=x(2-e^{-x})$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $2-e^{-x}\ge 0$ واستنتج إشارة $g'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) احسب $g(-1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty\,;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ:
$$\begin{cases} f(x)=x+4-\dfrac{e^x-1}{x}\ ;\ x>0 \\ f(x)=x+4-e^{\frac{x}{2}}\ ;\ x\le 0\end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f مستمرة عند الصفر.

2) أ) نقبل أنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(x)-3}{x}=\dfrac{1}{2}$ ، بيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{f(x)-3}{x}=\dfrac{1}{2}$. ماذا تستنتج؟

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $x_0=0$.

3) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

4) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\mathscr{D})$ معادلته $y=x+4$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{D})$.

5) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x>0$ ، $f'(x)=\dfrac{g(-x)}{x^2}$. استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل $x\le 0$ ، $2-e^{\frac{x}{2}}>0$. استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty\,;0]$.

جـ) شكّل جدول تغيرات الدالة f.

6) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β في $\mathbb{R}$ حيث $-3{,}9<\alpha<-3{,}8$ و $3{,}1<\beta<3{,}2$.

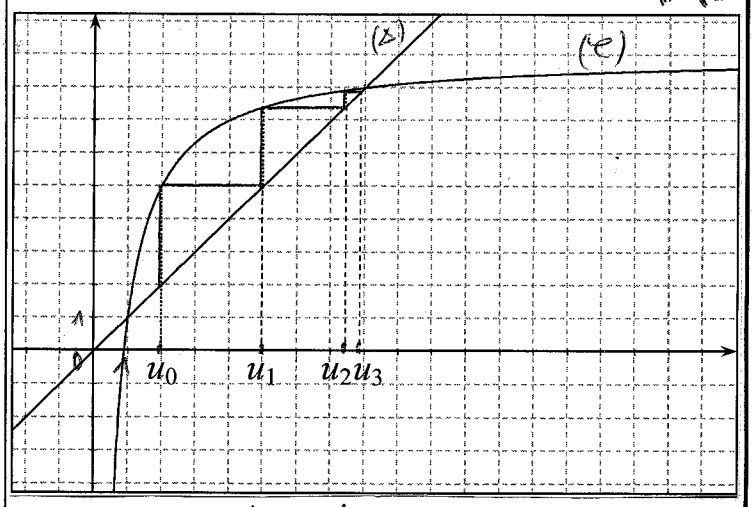
ب) ارسم المستقيمين المقاربين (Δ) و $(\mathscr{D})$ والمنحني $(\mathscr{C})$.

7) m وسيط حقيقي موجب. عيّن بيانيا قيم m حتى تقبل المعادلة $f(x)=mx+3$ حلا واحدا فقط معدوما.

تصحيح الفرض 1 للفصل 2 : 2018م

تمرين 1 :

1) أ)



ب) (U_n) متزايدة ونهايتها 8.

2) أ) $1 \leq U_n \leq 8$ $(n \in \mathbb{N})$

من أجل $n=0$: $1 \leq U_0 = 2 \leq 8$ محققة

نفرض أن $1 \leq U_n \leq 8$ ونبرهن: $1 \leq U_{n+1} \leq 8$

لدينا: $1 \leq U_n \leq 8$ ومنه $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{U_n} \leq 1$

$-1 \leq \frac{-8}{U_n} \leq -\frac{8}{8}$ ومنه $1 \leq 9 - \frac{8}{U_n} \leq 8$

أي $1 \leq U_{n+1} \leq 8$ ومنه $1 \leq U_n \leq 8$ $(n \in \mathbb{N})$

ب) $U_{n+1} - U_n = \frac{9U_n - 8}{U_n} - U_n = \frac{-U_n^2 + 9U_n - 8}{U_n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n - 1)(U_n - 8)}{U_n}$

$(U_n - 1) \geq 0$ و $(U_n - 8) \leq 0$ ومنه $U_{n+1} - U_n \geq 0$

(U_n) متزايدة

* (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

ج) $U_n = 1 + \frac{7}{6.e^{-3n} + 1}$

من أجل $n=0$: $U_0 = \left(1 + \frac{7}{6+1}\right) = 2$ (محققة)

نفرض أنها صحيحة من أجل n ونبرهن

صحتها من أجل $(n+1)$ أي $U_{n+1} = \frac{7}{6.e^{-3n-3} + 1}$

لدينا: $U_{n+1} = \frac{9U_n - 8}{U_n} = \frac{9 + \frac{63}{6.e^{-3n}+1} - 8}{1 + \frac{7}{6.e^{-3n}+1}}$

$U_{n+1} = \frac{6.e^{-3n} + 64}{6.e^{-3n} + 8} = \frac{6.e^{-3n} + 8 + 56}{6.e^{-3n} + 8}$

$U_{n+1} = 1 + \frac{56}{6.e^{-3n} + 8} = 1 + \frac{8 \times 7}{8\left(\frac{6}{8}e^{-3n} + 1\right)}$

$U_{n+1} = 1 + \frac{7}{6.e^{-3n-3} + 1}$ وهي محققة

إذن (U_n) صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$

3) أ)

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 8}{U_{n+1} - 1} = \frac{\frac{9U_n - 8}{U_n} - 8}{\frac{9U_n - 8}{U_n} - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - 8}{8U_n - 8} = \frac{1}{8}\left(\frac{U_n - 8}{U_n - 1}\right) = \frac{1}{8}V_n$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{8}$.

$V_0 = -6$ ومنه: $V_n = V_0 . q^n = -6\left(\frac{1}{8}\right)^n$

ب) $V_n = 1 - \frac{7}{U_n - 1}$ ومنه: $\frac{1}{U_n - 1} = \frac{1 - V_n}{7}$

$$S_n = \frac{1 - V_0}{7} + \frac{1 - V_1}{7} + \dots + \frac{1 - V_n}{7}$$

$$S_n = \frac{1 + 1 + \dots + 1 - (V_0 + V_1 + \dots + V_n)}{7}$$

$S_n = \frac{(n+1) - S'_n}{7}$ حيث $S'_n = -6\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{8}\right)}\right)$

$$S_n = \frac{(n+1) + \frac{48}{7}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right)}{7}$$

ومنه

$$S_n = \frac{n+1}{7} + \frac{48}{49}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين 2 :

1) أ) $h'(x) = 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}$

* $h'(x) = 0$ لما $x = -1$

* $h'(x) > 0$ لما $x > -1$ (h متزايدة)

* $h'(x) < 0$ لما $x < -1$ (h متناقصة)

x	-2		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	-1	↗	

ب) h متزايدة على $[-1;0]$ ومنه إذا

كان $-1 \leq x \leq 0$ فإن $h(-1) \leq h(x) \leq h(0)$

أي: $-1 \leq h(x) \leq -\ln 2 \leq 0$ (محققة)

ج) $h(x) - x = -\ln(x+2)$

$h(x) - x = 0$ لما $\ln(x+2) = 0$ أي $x+2 = 1$ ، $x = -1$

$h(x) - x > 0$ لما $\ln(x+2) < 0$ ومنه $-2 < x < -1$

$h(x) - x < 0$ لما $\ln(x+2) > 0$ ومنه $x > -1$

2) أ) $-1 \leq U_n \leq 0$ ، $(n \in \mathbb{N})$

لما $n=0$: $-1 \leq U_0 = 0 \leq 0$ (محققة)

نفرض أن $-1 \leq U_n \leq 0$ ونبرهن: $-1 \leq U_{n+1} \leq 0$

لدينا: $U_{n+1} = h(U_n)$ ومنه لنبرهن على أن $-1 \leq h(U_n) \leq 0$. سابقا لدينا:

$-1 \leq x \leq 0$ فإن $-1 \leq h(x) \leq 0$ ومنه:

$-1 \leq h(U_n) \leq 0$ إذن $-1 \leq U_n \leq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

ب) ندرس إشارة: $U_{n+1} - U_n = -\ln(U_n+2)$

لدينا: $-1 \leq U_n \leq 0$ ومنه $1 \leq U_n + 2 \leq 2$

$0 \leq \ln(U_n+2) \leq \ln 2$ أي $-\ln 2 \leq -\ln(U_n+2) \leq 0$

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ إذن (U_n) متناقصة.

يمكن استعمال نتيجة السؤال 1) ج).

ج) (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة. نهايتها ℓ حيث: $\ell = \ell - \ln(\ell+2)$

$\ln(\ell+2) = 0$ ومنه $\ell = -1$

تمرين 3:

I-1)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+1)\left(\frac{\cancelto{0}{xe^x} - \cancelto{0}{e^x} + 1}{\cancelto{0^+}{e^x}}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

2) أ) $g'(x) = (x-1+e^{-x}) + (1-e^{-x})(x+1)$

$g'(x) = 2x - xe^{-x} = x(2-e^{-x})$

ب) $2 - e^{-x} \geq 0$ لما $e^{-x} \leq 2$ ؛ $x \geq -\ln 2$

إشارة $g'(x)$:

x		$-\ln 2$		0	
	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$(1-\ln 2)^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $g(-1) = 0$. إشارة $g(x)$:

		-1		0	
	$-$	0	$+$	0	$+$

II-1)

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(x+4-\frac{e^x-1}{x}\right) = 3$$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 3 = f(0)$ ومنه f مستمرة 0

2) أ)

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x+1-e^{\frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x\to0} 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$f'_d(0) = f'_g(0)$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند 0

ب) (Δ): $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{2}x + 3$

3)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{4}{x}-\frac{e^x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+4-\frac{\cancelto{0}{e^x-1}}{x}\right) = -\infty$$

4) $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+4)] = \lim_{x\to-\infty} -\left(e^{\frac{x}{2}}\right) = 0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) $-\infty$

لما $x > 0$: $f(x) - y = -\left(\frac{e^x-1}{x}\right) < 0$

ولما $x \leq 0$: $f(x) - y = -e^{\frac{x}{2}} < 0$

ومنه (C) تحت (Δ) مهما يكن $x \in \mathbb{R}$.

5) أ)

$$f'(x) = 1 - \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 1 - xe^x + e^x}{x^2}$$

$x > 0$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2} = \frac{(-x+1)(-x-1+e^x)}{x^2} = \frac{g(-x)}{x^2}$$

$g(-x) \leq 0$ لما $-x \leq -1$ ومنه $x \geq 1$.

$g(-x) > 0$ لما $-1 < -x < 0$ ومنه $0 < x \leq 1$.

ومنه إشارة $f'(x)$ لما $x > 0$:

	0		1	
	$+$	0	$-$	

ب) $x \leq 0$ ومنه $\frac{x}{2} \leq 0$ بالتالي $e^{\frac{x}{2}} \leq 1$

$-e^{\frac{x}{2}} \geq -1$. ومنه $2 - e^{\frac{x}{2}} > 0$.

$f'(x) = \frac{2-e^{\frac{x}{2}}}{2}$

إشارة $f'(x)$ لما $x \leq 0$:

	0	
	$+$	0

ج)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$6-e$	$\searrow$	$-\infty$

6) أ) f مستمرة ومتزايدة على $]-3,9 ; -3,8[$

$f(-3,9) = -0,04 < 0$ و $f(-3,8) = 0,05 > 0$

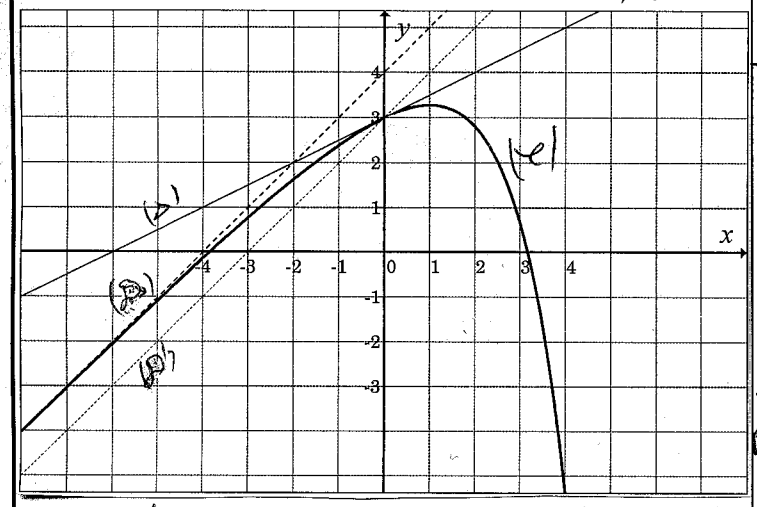
حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

f مستمرة ومتناقصة على $]3,1 ; 3,2[$

$f(3,2) = -0,15 < 0$ و $f(3,1) = 0,26 > 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

ب) الرسم.



7) المستقيمات: $y = mx+3$ تشمل نقطة ثابتة $A(0;3)$

لدينا المستقيم (D): $y = x+3$ يوازي (D)

$f(x) = mx+3$ تقبل حلا مضاعفا لما $m \geq 1$

"عبد المطلب"