المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) — دورة: ماي 2018

الشعبة: علوم تجريبية — إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2u_n^{\ 2}}{4u_n+1}$.

1- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 0{,}5$.

2- ادرس اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n)، واستنتج أنّها متقاربة.

3- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{2u_n}\right)$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 2، يطلب حساب حدّها الأوّل v_0.

ب) اكتب عبارة كلا من v_n و u_n بدلالة n. استنتج نهاية المتتالية (u_n).

ج) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}$. بيّن أنّ $P_n=2^{(2^{n+1}-1)}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

اختر جوابا واحدا صحيحا مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- النقطة M التي تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $A(0;-1)$ ونصف قطرها $r=3$ لاحقتها z تحقّق:

أ) $|z+i|^2=3$ **ب)** $|z+i|=3$ **ج)** $|z-i|=3$

2- A و B نقطتان حيث: $z_A=2$ و $z_B=3-2i$، و(E) مجموعة النقط M تحقّق: $|z-2|=|iz-3i-2|$.

أ) (E) هي محور القطعة [AB] **ب)** (E) هي القطعة [AB] **ج)** (E) هي دائرة مركزها A وقطرها [AB].

3- n عدد طبيعي. العدد المركب $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^n$ تخيلي صرف إذا تحقّق:

أ) $n=4k+2$ **ب)** $n=4k+4$ **ج)** $n=8k+4$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

4- لتكن النقط A، B و C لاحقاتها z_A، z_B و z_C بحيث: $z_A-z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C-z_B)$.

أ) ABC مثلث متساوي الساقين وقائم **ب)** ABC مثلث متساوي الأضلاع **ج)** A، B و C في استقامية.

5- لتكن النقط A، B و C لاحقاتها: $z_A=2i$، $z_B=1$ و $z_C=5+2i$. العبارة المركبة للتشابه s حيث $s(A)=B$ و $s(B)=C$ هي:

أ) $z'=-2iz-3$ **ب)** $z'=2iz-3$ **ج)** $z'=2iz+5$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس U_1 يحتوي على 5 كرات بيضاء (B) و3 كرات سوداء (N). كيس U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء و5 كرات سوداء. كيس U_3 يحتوي على 3 كرات بيضاء و3 كرات سوداء. نختار عشوائيا كيسا، ونسحب منه كرة واحدة.

1- أنشئ شجرة الاحتمالات التي تمنذج هذه الوضعية.

2- احسب احتمال سحب كرة بيضاء.

3- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء، ما احتمال أن تكون من U_2؟

4- نضيف إلى الكيس U_1 كرة واحدة خضراء ثم نختار عشوائيا كيسا، ونسحب منه كرة واحدة.

احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو سوداء؟

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرّفة على $D_g=\left]-\infty\,;-\frac{1}{e}\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$ بـ: $g(x)=-\frac{1}{ex+1}+2\ln\left(\frac{ex+1}{x}\right)$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}g(x)$، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-\frac{1}{e}}g(x)=+\infty$.

2- أثبت أنّه من أجل كل x من D_g، فإنّ $g'(x)=\frac{-ex-2}{x(ex+1)^2}$، ثم ادرس إشارة $g'(x)$.

3- شكّل جدول تغيرات الدالة g، ثم استنتج أنّ $g(x)>0$ من أجل كل x من D_g .

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $D_f=\left]-\infty\,;-\frac{1}{e}\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$ بـ: $f(x)=x^2\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=0$ (يمكن وضع $t=\frac{1}{x}$).

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-\frac{1}{e}$.

2- ادرس الأوضاع النسبية للمنحني $(\mathscr{C})$ والمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $x\mapsto x^2$.

3- أ) أثبت أنّه من أجل كل x من D_f، فإنّ $f'(x)=xg(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكّل جدول تغيراتها.

4- أ) اكتب معادلة المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ مع حامل محور الفواصل.

ب) ارسم في نفس المعلم المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

5- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=e^m-1$.

6- ادرس إشارة $f(x)$ على D_f، ثم اشرح كيفية رسم المنحني (Γ) للدالة $|f|$. (الرسم غير مطلوب)

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط: $A(0;0;1)$ ، $B(0;2;3)$ ، $C(6;5;0)$ و $D(2;0;2)$.

1- أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعرّف مستويا.

ب) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) ثم تأكّد أنّ معادلته الديكارتية هي $\mathscr{P}: x-y+z-1=0$.

2- المسقط العمودي للنقطة C على المستوي $\mathscr{P}'$ هي النقطة B.

أ) بيّن أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي $\mathscr{P}'$ هي $\mathscr{P}': 2x+y-z+1=0$.

ب) بيّن أنّ المستوي $\mathscr{P}$ يعامد المستوي $\mathscr{P}'$.

ج) بيّن أنّ تقاطع $\mathscr{P}$ و $\mathscr{P}'$ هو المستقيم (AB). اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

3- أ) احسب المسافة بين النقطة D والمستوي $\mathscr{P}$، ثم المسافة بين النقطة D والمستوي $\mathscr{P}'$.

ب) احسب بطريقتين مختلفتين بعد النقطة D عن المستقيم (AB).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $z_A=-3$.

لكل نقطة M لاحقتها العدد z ، حيث $z\neq z_A$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد z' المعرّف بـ: $z'=\dfrac{iz}{z+3}$.

1- أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z'=i(z+1)$. نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي هذه المعادلة.

ب) اكتب على الشكل الأسي العددين z_1 و z_2 ، ثم بيّن أنّ $z_1^{2018}+z_2^{2018}=-(z_2-z_1)^{2018}$.

2- أ) فسّر هندسيا طويلة العدد المركب z' .

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث M' تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O ونصف قطرها 1.

ج) عيّن O' صورة O بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 3- ، ثم استنتج صورة الدائرة $\mathscr{C}$ بهذا التحاكي.

3- أ) من أجل كل نقطة M تختلف عن A و O ، بيّن أنّ $\arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OM}\right)+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

ب) بيّن أنّه إذا كانت M' تنتمي إلى محور التراتيب فإنّ M تنتمي إلى محور الفواصل باستثناء النقطة A.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كريات بيضاء و3 كريات سوداء. نسحب ثلاث كريات في آن واحد بطريقة عشوائية.

نعتبر أنّ سحب كرية بيضاء يعطي ربح نقطتين وسحب كرية سوداء يعطي ربح نقطة واحدة.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع أرباح الكريات المسحوبة.

1- أ) احسب احتمال سحب ثلاث كريات من نفس اللون.

ب) احسب احتمال سحب ثلاث كريات من لونين مختلفين.

ج) احسب احتمال سحب على الأقل كرية واحدة بيضاء.

2- عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

3- نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع.

أ) احسب احتمال سحب ثلاث كريات بيضاء.

ب) احسب احتمال سحب كرية واحدة فقط بيضاء.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{x}}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريف الدالة f.

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادلتيهما.

2- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}(e^{x}-1)^{2}}$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3- نعتبر كثير الحدود $P(x)$، حيث: $P(x)=3x^{3}-6x^{2}-x+2$.

أ) احسب $P(2)$، ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين: $P(x)=0$ و $P(e^{x})=0$.

ب) اكتب معادلتي المماسين للمنحني $(\mathscr{C})$ بحيث يكون معامل توجيه كل منهما يساوي $\frac{3}{2}$.

4- أ) اشرح كيفية رسم المنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+e^{-x}$.

ب) بيّن أنّ المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ متقاربان في جوار $-\infty$.

ج) ارسم المماسين والمنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

5- أ) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}^*$، $f(x)=ae^{-x}+b+\dfrac{ce^{x}}{1-e^{x}}$.

ب) احسب المساحة $\mathscr{A}$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C})$، والمستقيمات: $x=\ln 2$ ، $x=\ln 3$ و $y=1$.

6- لتكن h الدالة المعرّفة على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ بـ: $h(x)=f(\ln x)$.

باستعمال مشتقة دالة مركبة، احسب $h'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h.

7- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*-\{1\}$ بـ: $u_n=h(n)$. احسب المجموع: $S_n=u_2+u_3+\ldots+u_n$.

تصحيح البكالوريا التجريبي: 2018م

الموضوع 1 عبد المطلب

تمرين 1:

1. $n=0$: $0 \leq u_0 \leq 0,5$ (محققة)

نفرض أن $0 \leq u_n \leq 0,5$ ونبرهن $0 \leq u_{n+1} \leq 0,5$

$0 \leq u_n \leq 0,5$ ، $1 \leq 4u_n+1 \leq 3$

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{4u_n+1} \leq 1$ ؛ $0 \leq u_n^2 \leq 0,25$

$0 \leq 2u_n^2 \leq 0,5$ ومنه: $0 \leq \frac{2u_n^2}{4u_n+1} \leq 0,5$

$0 \leq u_{n+1} \leq 0,5$ ومنه $0 \leq u_n \leq 0,5$ $(n \in \mathbb{N})$

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2}{4u_n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 - u_n}{4u_n+1}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(2u_n+1)}{4u_n+1} \leq 0$ (لأن $u_n \geq 0$)

ومنه (u_n) متناقصة.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

3. أ) $v_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{2u_{n+1}}\right) = \ln\left(1+\frac{4u_n+1}{4u_n^2}\right)$

$v_{n+1} = \ln\left(\frac{4u_n^2+4u_n+1}{4u_n^2}\right) = \ln\left(\frac{2u_n+1}{2u_n}\right)^2$

$v_{n+1} = 2v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية

أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = \ln 2$

ب) $v_n = v_0 \cdot q^n = (\ln 2) \cdot 2^n$

$1 + \frac{1}{2u_n} = e^{v_n}$ ، $\frac{1}{2u_n} = e^{v_n} - 1$

$2u_n = \frac{1}{e^{v_n}-1}$ ومنه $u_n = \frac{1}{2(e^{v_n}-1)}$

$u_n = \frac{1}{2[(e^{\ln 2})^{2^n}-1]}$ ومنه $u_n = \frac{1}{2(2^{2^n}-1)}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} 2^{2^n} = +\infty$

ج) $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0+v_1+\dots+v_n}$

$P_n = e^{v_0\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)} = e^{\ln 2(2^{n+1}-1)}$

في الأخير:

$P_n = 2^{(2^{n+1}-1)}$

تمرين 2:

1. $|z+i| = |z - z_A| = 3$

$AM = 3$ الجواب الصحيح: ب)

2. $|z-2| = |i(z-3+2i)|$

$|z-2| = |i| \cdot |z-3+2i|$

$|z - z_A| = |z - z_B|$ $AM = BM$

الجواب الصحيح: أ)

3. $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n = (2e^{i\frac{\pi}{4}})^n$

$(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

$(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n$ تخيلي صرف: $\cos\frac{n\pi}{4} = 0$

$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه: $n = 4k+2$

الجواب الصحيح: أ)

4. $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\frac{BA}{BC} = 1$ و $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{3}$

الجواب الصحيح: ب)

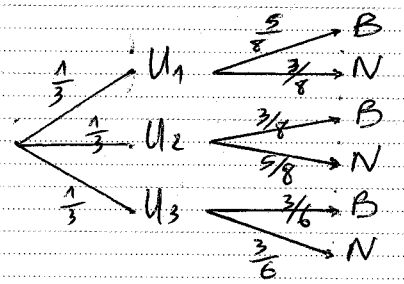
5. $\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases}$ $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$

$a = \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = 2i$ و $b = 5$

الجواب الصحيح: ج)

تمرين 3:

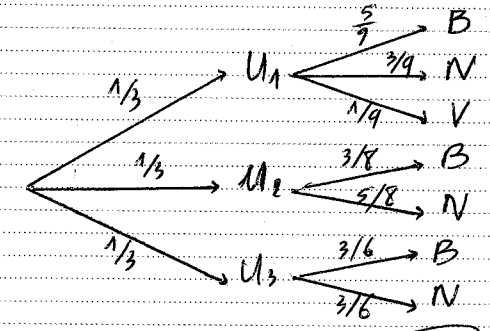
1)



2) $P(B) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{6}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

3) $P_B(U_2) = \frac{P(U_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

4)



$$P = 1 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{9}\right) = \frac{26}{27}$$

تمرين 4:

I- 1- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 2$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -\frac{1}{e}} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -\frac{1}{e}} \left(\frac{-1 + 2(ex+1)\ln|ex+1|}{ex+1} - 2(ex+1)\ln|x| \right) = +\infty$$

2- $g'(x) = \dfrac{e}{(ex+1)^2} + 2\left(\dfrac{-1}{x(ex+1)}\right) = \dfrac{-ex-2}{x(ex+1)^2}$

إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-2/e$		$-1/e$		0		$+\infty$
$-ex-2$		+	0	−		−		−	
x		−		−		−		+	
$g'(x)$		−	0	+	‖	‖	‖	−	

3-

x	$-\infty$		$-2/e$		$-1/e$		0		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	‖	‖	‖	−	
$g(x)$	2	↘	$3-2\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖	‖	$+\infty$	↘	2

القيمة الحدية الصغرى أكبر من 0 ومنه $g(x) > 0$.

II- 1- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t+e)}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t+e}{t^2} \cdot \frac{\ln(t+e)}{t+e} = 0$$

ب) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -\frac{1}{e}} f(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1/e} \left(e + \frac{1}{x}\right) = 0^+$

ومنه $x = -\frac{1}{e}$ مستقيم مقارب لـ (C) .

2- $f(x) - x^2 = x^2\left[\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - 1\right]$

$f(x) - x^2 > 0$ لما $\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) > 1$: $x > 0$ أي $e + \frac{1}{x} > e$

$f(x) - x^2 < 0$ لما $e + \frac{1}{x} < e$ ومنه $x < -\frac{1}{e}$.

3- أ)

$$f'(x) = 2x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x(ex+1)} = x\left(2\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{ex+1}\right) = x\,g(x)$$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة x لأن: $g(x) > 0$

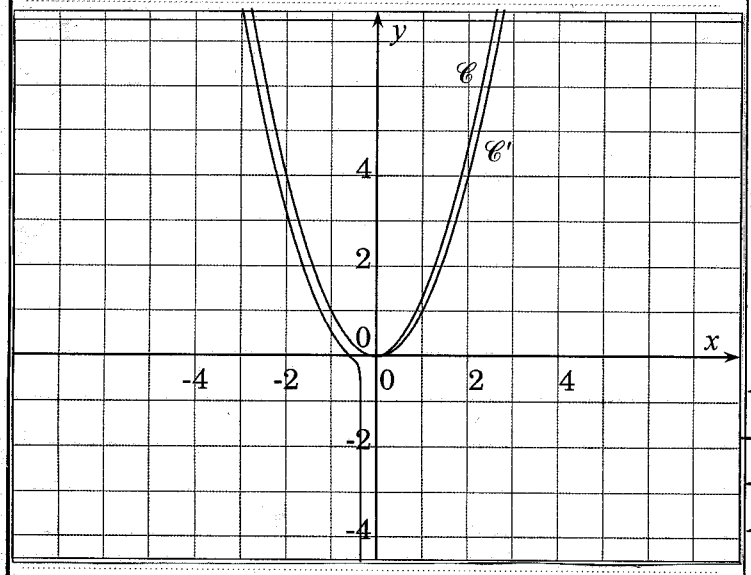
x	$-\infty$		$-1/e$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	+	‖	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖	‖	0	↗	$+\infty$

4- $f(x) = 0$ لما $\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = 0$ ،

$e + \frac{1}{x} = 1$ ومنه $x = \frac{1}{1-e}$.

$$y = f'\left(\frac{1}{1-e}\right)\left(x - \frac{1}{1-e}\right) = -x + \frac{1}{1-e}$$

ب) الرسم:



5- $f(x) = e^m - 1$: فواصل تقاطع (C) مع المستقيمات الأفقية $y = e^m - 1$:

* $e^m - 1 \leq 0$ أي $m \leq 0$: حل واحد سالب
* $e^m - 1 > 0$ أي $m > 0$: حلان مختلفان في الإشارة

6- * $f(x) = 0$ لما $x = \frac{1}{1-e}$

* $f(x) \geq 0$ لما $\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) \geq 0$ أي

$e + \frac{1}{x} \geq 1$ ومنه $\frac{x(e-1)+1}{x} \geq 0$

		$1/1-e$		$-1/e$		0	
	+	0	−	‖	‖		+

إذن $f(x) \geq 0$ لما: $x \in \left]-\infty, \frac{1}{1-e}\right] \cup]0, +\infty[$

* $f(x) < 0$ لما $x \in \left]\frac{1}{1-e}, \frac{-1}{e}\right[$

* $|f(x)| = f(x)$ لما: $x \in \left]-\infty, \frac{1}{1-e}\right] \cup]0, +\infty[$

(Γ) يطابق (C)

* $|f(x)| = -f(x)$ لما: $x \in \left]\frac{1}{1-e}; \frac{-1}{e}\right[$

(Γ) يناظر (C) بالنسبة لمحور الفواصل

"عبد المطلب"

الموضوع 2:

تمرين 1:

1) أ) $\vec{AB}(0;2;2)$ و $\vec{AC}(6;5;-1)$

$\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا: $\frac{0}{6} \neq \frac{2}{5}$

ب) $\vec{AM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ (α و β حقيقيين)

$$(P): \begin{cases} x = 6\beta \\ y = 2\alpha + 5\beta \\ z = 2\alpha - \beta + 1 \end{cases}$$

عند تعويض x, y و z في المعادلة:

$x - y + z - 1 = 0$

نجد: $0 = 0$ (محققة)

2) أ) $\vec{BC}(6;3;-3)$ شعاع ناظمي لـ (P').

$6x + 3y - 3z + d = 0$

B تنتمي إلى (P') ومنه: $d = 3$.

$(P'): 2x + y - z + 1 = 0$

ب) $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي لـ (P).

$\vec{n}\cdot\vec{BC} = 0$ ومنه: $(P') \perp (P)$.

ج) $2x_A + y_A - z_A + 1 = 0$ ومنه $A \in (P')$.

إذن (AB) هو تقاطع (P) و (P').

$\vec{AM} = t\vec{AB}$ $(t \in \mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ومنه: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = 2t+1 \end{cases}$

3) أ) $d(D;(P)) = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$d(D;(P')) = \frac{|4-2+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ب) ط1:

$d(D;(AB)) = \sqrt{[d(D;(P))]^2 + [d(D;(P'))]^2}$

$d(D;(AB)) = \sqrt{3 + \frac{6}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

ط2: لتكن H المسقط العمودي لـ (D) على (AB)

$H\begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ 2t+1 \end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (AB).

$\vec{DH}\cdot\vec{u} = 0$ أي $\begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 2t-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$4t + 4t - 2 = 0$ نجد $t = \frac{1}{4}$

إذن $H(0;\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ ومنه $\vec{DH}\begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$d(D;(AB)) = DH = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

تمرين 2:

1) أ) $\frac{iz}{z+3} = i(z+1)$

$z^2 + 3z + 3 = 0$

ومنه: $z_1 = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$

ب) $z_1 = \sqrt{3}e^{i(-\frac{5\pi}{6})}$ و $z_2 = \sqrt{3}e^{i(\frac{5\pi}{6})}$

$z_1^{2018} = \sqrt{3}^{2018}e^{i(2018(-\frac{5\pi}{6}))} = \sqrt{3}^{2018}\cdot e^{i(\frac{\pi}{3})}$

$z_2^{2018} = \overline{z_1}^{2018} = \sqrt{3}^{2018}e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

$(z_2 - z_1)^{2018} = (\sqrt{3}i)^{2018} = \sqrt{3}^{2018}(i^2)^{1009}$

$(z_2 - z_1)^{2018} = -\sqrt{3}^{2018} = -(z_1^{2018} + z_2^{2018})$

2) أ) $|z'| = \left|\frac{iz}{z+3}\right| = |i|\cdot\frac{|z|}{|z+3|} = \frac{|z-z_O|}{|z-z_A|} = \frac{OM}{AM}$

ب) $OM' = 1$ أي $|z'| = 1$

$\frac{OM}{AM} = 1$ ومنه $OM = AM$ محور القطعة $[OA]$

ج) $z' - z_A = -3(z - z_A)$

ومنه $z' = -3z - 12$

صورة O هي O' لاحقتها -12.

$(\mathcal{C})$ هي الدائرة التي مركزها O' ونصف قطرها 3

3) أ) $\arg(z') = \arg\left(i\cdot\frac{z}{z+3}\right) = \arg i + \arg\left(\frac{z-z_O}{z-z_A}\right)$

ومنه $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + (\vec{AM},\vec{OM}) + 2k\pi$

ب) M' تنتمي إلى محور التراتيب معناه z' تخيلي صرف أي:

$\arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $z = 0$

$\frac{\pi}{2} + (\vec{AM},\vec{OM}) = \frac{\pi}{2} + k'\pi$

$(\vec{AM},\vec{OM}) = k'\pi$ ومنه O, M, A في استقامية.

بما أن A على محور الفواصل إذن M تنتمي إلى محور الفواصل.

تمرين 3:

1) $P_1 = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{11}{56}$

ب) $P_2 = \frac{C_5^1\times C_3^2 + C_5^2\times C_3^1}{C_8^3} = \frac{45}{56}$

ج) $P_3 = 1 - \frac{C_3^3}{C_8^3} = 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56}$

2- $P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_8^3}$ ، $P(X=4) = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3}$

$P(X=5) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3}$ ، $P(X=6) = \frac{C_5^3}{C_8^3}$

X	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

$E(X) = \frac{1}{56}(3\times1 + 4\times15 + 5\times30 + 6\times10) = \frac{39}{8}$

$E(X) = 4,875$

3- أ) $P_1 = \frac{A_5^3}{A_8^3} = \frac{5}{28}$

$P_2 = \frac{3(A_5^1 \times A_3^2)}{A_8^3} = \frac{15}{56}$

تمرين 4:

1- أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

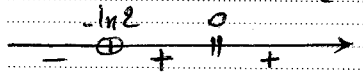
$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = -\infty$

ب) $y=0$ و $x=0$ مستقيمين مقاربين لـ (C).

2- أ) $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-e^x) + e^x(e^{-x})}{(1-e^x)^2} = \frac{2-e^{-x}}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^x-1}{e^x(1-e^x)^2}$

ب) $f'(x) = 0$ لما $e^x = \frac{1}{2}$ ومنه $x = -\ln 2$

إشارة $f'(x)$



x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

3- أ) $P(2) = 0$ ، $P(x) = (x-2)(3x^2-1)$

لما $P(x)=0$: $x_1 = 2$ ، $x_2 = \frac{-1}{\sqrt3}$ ، $x_3 = \frac{1}{\sqrt3}$

$P(e^x)=0$: $x_1 = \ln 2$ ، $x_2 = -\frac{\ln 3}{2}$

ب) $f'(x_0) = \frac{3}{2}$

$\frac{2e^{x_0}-1}{e^{x_0}(1-e^{x_0})^2} = \frac{3}{2}$

نجد: $3e^{3x_0} - 6e^{2x_0} - e^{x_0} + 2 = 0$

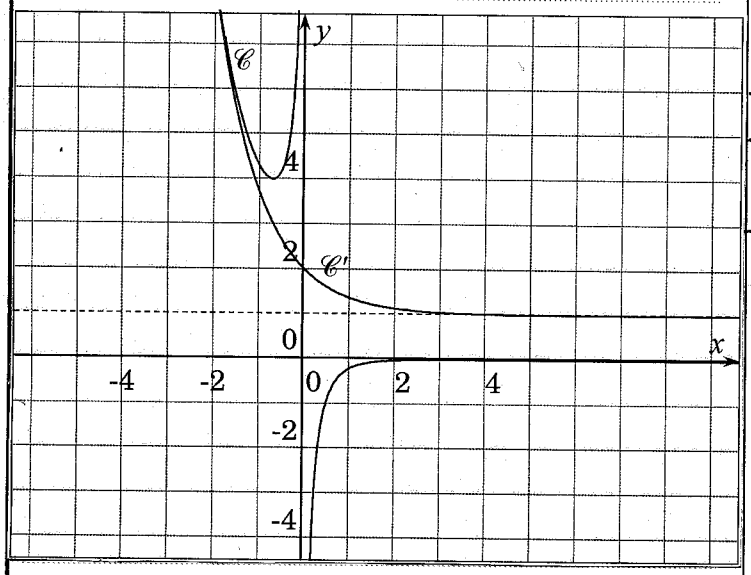
$P(e^{x_0}) = 0$ ومنه $x_0 = \ln 2$ أو $x_0 = -\frac{\ln 3}{2}$

$y_1 = \frac{3}{2}(x - \ln 2) - \frac{1}{2}$ ؛ $y_2 = \frac{3}{2}\left(x + \frac{\ln 3}{2}\right) + \frac{3}{\sqrt3 - 1}$

4- أ) نناظر منحنى الدالة: $x \to e^x$ بالنسبة لمحور التراتيب ثم نقوم بانسحاب شعاعه $\binom{0}{1}$

ب) $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1-e^x} = 0$

ج) الرسم:



5- $f(x) = \frac{ae^{-x} + (c-b)e^x + b - a}{1-e^x} = \frac{e^{-x}}{1-e^x}$

بالمطابقة نجد: $a=1$ ، $b=1$ و $c=1$

$f(x) = e^{-x} + 1 + \frac{e^x}{1-e^x}$

ب) $A = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (1 - f(x))\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(-e^{-x} - \frac{e^x}{1-e^x}\right)dx$

$A = \left[e^{-x} + \ln|1-e^x|\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{-1}{6} + \ln 2$

6- $h'(x) = (\ln x)' \times f'(\ln x) = \frac{1}{x} \times \frac{2x-1}{x(1-x)^2}$

$h'(x) = \frac{2x-1}{[x(x-1)]^2}$

x	0		$1/2$		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	−	0	+	‖	+	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

7- $U_n = \frac{1}{n(1-n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{1-n}$

$U_2 = \frac{1}{2} - 1$

$+ \; U_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

$+ \; U_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$

$+ \; \vdots$

$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{1-n}$

ومنه: $S_n = \frac{1}{n} - 1$

"عبد المطلب"