

# الفرض الأول

## للفصل الأول

### تمرين 1 (6نقاط)

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 6x + 9} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 2x - 5}{(x-1)^2} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - 2x) \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1} \quad .4$$

### تمرين 2 (4نقاط)

إليك جدول تغيرات الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-\infty; 5]$ .(1) عيّن إشارة  $f(x)$  على المجال  $]-\infty; 5]$ .(2) أنشئ جدول تغيرات كلا من الدالتين  $g$  و  $h$  بحيث:

$$g(x) = -f(x) \text{ و } h(x) = |f(x)|$$

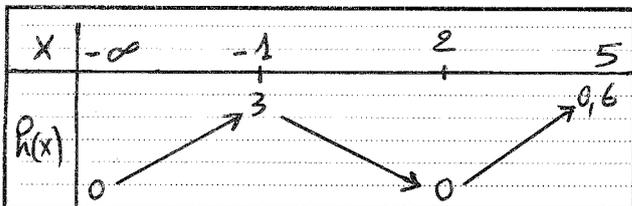
(3) عيّن العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $]-\infty; 5]$ ، فإن  $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 5}$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$5$
$f(x)$	$0$	$-3$	$0$	$0,6$

### تمرين 3 (10نقاط)

$f$  و  $g$  الدالتان المعرفتان على الترتيب على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  و  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$  و  $g(x) = x\sqrt{x^2 + 3} + 2$ .

ولیکن  $(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_g)$  تمثيلهما البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .(1) احسب النهايات عند حدود مجالات تعريف كلا من الدالتين  $f$  و  $g$ .(2) بيّن أنّه من أجل كل عدد  $x \neq -1$ ،  $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$ . ادرس إشارة  $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ .(3) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g'(x) = \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 3}}$ . ادرس إشارة  $g'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $g$ .(4) بيّن أنّ المنحني  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته  $y = x - 2$ . ادرس الوضع النسبي لـ  $(\mathcal{C}_f)$  و (D).(5) بيّن أنّ المنحني  $(\mathcal{C}_g)$  يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيينها. اكتب معادلة المماس للمنحني  $(\mathcal{C}_g)$  عند النقطة A.(6)  $h$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ:  $h(x) = (f \circ g)(x)$ . احسب  $h(1)$  و  $h'(1)$ .(7)  $k$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $\begin{cases} k(x) = g(x) & x \leq 0 \\ k(x) = f(x) & x > 0 \end{cases}$ ، احسب:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(x) - 2}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(x) - 2}{x}$ . ماذا تستنتج؟



$$f(-1) = -3, \quad f(2) = 0 \quad f(x) = \frac{ax+b}{x^2+5} \quad (3)$$

$$\frac{-a+b}{6} = -3 \quad \text{و} \quad \frac{2a+b}{9} = 0$$

هذا هو الجواب  $\begin{cases} 2a+b=0 \\ -a+b=-18 \end{cases}$  نحلها:

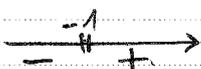
$$b = -12 \quad \text{و} \quad a = 6$$

تمرين 3:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2}{x+1} = -\infty$$



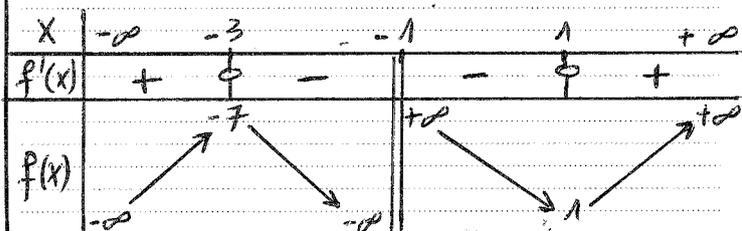
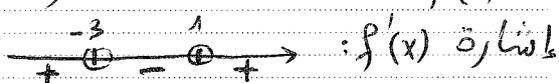
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - 1(x^2+x+2)}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$x = -3 \quad \text{و} \quad x = 1 \quad \text{لأن} \quad f'(x) = 0$$



تصحيح الفرض 1 للفصل الأول : 2018

تمرين 1: عند النظر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 2x - 5}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x - 1}{(x-3)^2} = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x} = -\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-5)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-5}{x-1} = \frac{7}{2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2) = -\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x^2+5} - 3)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{(x+2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5} + 3} = \frac{-2}{3} \quad (6)$$

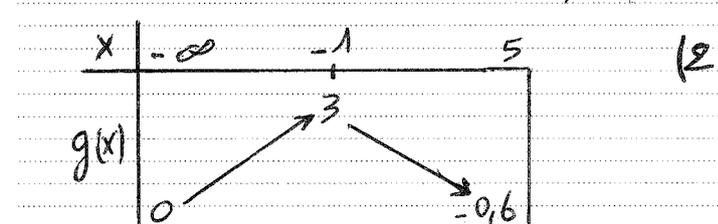
يمكن استعمال تعريف اللانهاية.

تمرين 2:

$$-\infty < x < 2 \quad \text{لأن} \quad f(x) < 0 \quad (1)$$

$$2 < x < 5 \quad \text{لأن} \quad f(x) > 0$$

$$x = 2 \quad \text{لأن} \quad f(x) = 0$$



عند  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  ليد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$h(1) = f(g(1)) = f(4) = \frac{14}{5} = 2,8$$

$$h'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \quad \text{ليد}$$

$$h'(1) = g'(1) \cdot f'(4) = \frac{21}{10} = 2,1 \quad \text{عند } g$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x^2+3}}{x} \quad (7)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+3} = \sqrt{3}$$

g قابلة للاشتقاق على يسار 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2-x+2}{x+1} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x+1} = -3$$

f قابلة للاشتقاق على يمين 0

$$k'_g(0) \neq k'_f(0)$$

و g و k غير قابلة للاشتقاق عند 0

*مع الخط*

$$g(x) = x\sqrt{x^2+3} + 2 \quad (3)$$

$$g'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2+3} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}, x$$

$$g'(x) = \sqrt{x^2+3} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}} > 0$$

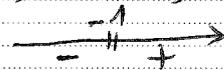
x	$-\infty$	$+\infty$
g'(x)		+
g(x)	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-x+2}{x+1} - x+2 \right) \quad (4)$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

(D) مستقيم مائل (D) عند g

(f(x)-y) قابلة للاشتقاق عند 0



(D) أسفل (Cf) :  $x < -1$  و

(D) أعلى (Cf) :  $x > -1$  و

$$g''(x) = \frac{4x\sqrt{x^2+3} - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \cdot (2x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}^2} \quad (5)$$

$$g''(x) = \frac{x(2x^2+9)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

$$\xrightarrow{0} \text{ , } x=0 \text{ و } g''(x)=0$$

النقطة A(0;2)

المماس

$$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

$$(y = \sqrt{3}x + 2)$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad (6)$$