الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**الفرض الأول** **للفصل الأول**	الموسم الدراسي: 2019/2018م المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (6نقاط)

احسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+2x-5}{(x-1)^2}$
2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-3x-1}{x^2-6x+9}$
3. $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-3x}$
4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-2x\right)$
6. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$

تمرين2 (4نقاط)

إليك جدول تغيرات الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;5]$.

x	$-\infty$		-1		2		5
$f(x)$	0	↘	-3	↗	0	↗	$0,6$

1) عيّن إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty;5]$.

2) أنشئ جدول تغيرات كلا من الدالتين g و h بحيث:

$g(x)=-f(x)$ و $h(x)=|f(x)|$.

3) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كلّ عدد x من المجال $]-\infty;5]$، فإنّ $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+5}$.

تمرين3 (10نقاط)

f و g الدالتان المعرّفتان على الترتيب على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ و $g(x)=x\sqrt{x^2+3}+2$.

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلهما البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايات عند حدود مجالات تعريف كلا من الدالتين f و g.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد $x\neq1$، $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$. ادرس إشارة $f'(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$. ادرس إشارة $g'(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

4) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته $y=x-2$. ادرس الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_f)$ و (D).

5) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C}_g)$ يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيينها. اكتب معادلة المماس للمنحني $(\mathscr{C}_g)$ عند النقطة A.

6) h الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $h(x)=(f\circ g)(x)$. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$، $h(1)$ و $h'(1)$.

7) k الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases}k(x)=g(x) & x\leq0\\ k(x)=f(x) & x>0\end{cases}$، احسب: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{k(x)-2}{x}$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{k(x)-2}{x}$. ماذا تستنتج؟

تصحيح الفرض 1 للفصل الأول: 2018م

عبد المطلب

تمرين 1:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+2x-5}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$

2) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x-1}{x^2-6x+9} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{\overbrace{x^2-3x-1}^{\to -1}}{\underbrace{(x-3)^2}_{\to 0^+}} = -\infty$

	0		3	
	+	−		+

3) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to} 0} \frac{\overbrace{x^2-3x+1}^{\to 1}}{\underbrace{x^2-3x}_{\to 0^-}} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2-3x-5}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x-5)}{(x+1)(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \frac{2x-5}{x-1} = \frac{7}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 2x\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} - 2\right) = -\infty$

6) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to -2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{-2}{3}$

يمكن استعمال تعريف العدد المشتق.

تمرين 2:

1) $f(x) < 0$ لما $x < 2$.

$f(x) > 0$ لما $2 < x \leq 5$.

$f(x) = 0$ لما $x = 2$.

	$-\infty$		2		5	
		−	0	+		

2)

x	$-\infty$		-1		5
$g(x)$	0	↗	3	↘	$-0,6$

3) $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+5}$ ، $f(2)=0$ ، $f(-1)=-3$

$\frac{2a+b}{9} = 0$ و $\frac{-a+b}{6} = -3$

عند حل هذه الجملة $\begin{cases} 2a+b=0 \\ -a+b=-18 \end{cases}$ نجد:

$a=6$ و $b=-12$

تمرين 3:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to} -1} \frac{\overbrace{x^2-x+2}^{\to 4}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}} = -\infty$

	-1	
−	‖	+

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to} -1} \frac{\overbrace{x^2-x+2}^{\to 4}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

2)

$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - 1(x^2-x+2)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$ لما $x=1$ أو $x=-3$

إشارة $f'(x)$:

		-3		1	
	+	0	−	0	+

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3) $g(x) = x\sqrt{x^2+3} + 2$

$$g'(x) = 1\cdot\sqrt{x^2+3} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot x$$

$$g'(x) = \sqrt{x^2+3} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) $$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x+1} - x + 2\right)$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x+1} = 0$$

ومنه (D) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

الوضعية: ندرس إشارة $(f(x)-y)$

-1: $-$ | $+$

لما $x<1$: (C_f) أسفل (D)

ولما $x>1$: (C_f) أعلى (D)

5) $$g''(x) = \frac{4x\sqrt{x^2+3} - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\cdot(2x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}^{\,2}}$$

$$g''(x) = \frac{x(2x^2+9)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

$g''(x)=0$ لما $x=0$ ، 0: $-$ | $+$

النقطة هي $A(0;2)$

معادلة المماس:

$$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

$$y = \sqrt{3}\,x + 2$$

6) $h(x) = (f\circ g)(x) = f[g(x)]$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$h(1) = f[g(1)] = f(4) = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

لدينا: $h'(x) = g'(x)\cdot f'(g(x))$

ومنه: $h'(1) = g'(1)\cdot f'(4) = \frac{21}{10} = 2{,}1$

7) $$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{g(x)-2}{x} = \lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{x\sqrt{x^2+3}}{x}$$

$$= \lim_{x\overset{<}{\to}0}\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3}$$

g قابلة للاشتقاق على يسار 0.

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-2}{x} = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\frac{x^2-x+2}{x+1}-2}{x}$$

$$= \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^2-3x}{x(x+1)} = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x(x-3)}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x-3}{x+1} = -3$$

f قابلة للاشتقاق على يمين 0.

$$k'_g(0) \neq k'_d(0)$$

ومنه k غير قابلة للاشتقاق عند 0.

عبد المطلب