الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2019/2018 المدة: ثلاث ساعات (3سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (4نقاط)

1) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\sqrt{x}+2$

أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

ب) بيّن أنّ: إذا كان $x>4$ فإنّ $f(x)-x<0$. استنتج إشارة $f(x)-x$ على المجال $[1;+\infty[$.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n<4$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

3) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $v_0=9$ و $v_{n+1}=f(v_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $4<v_n\le 9$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

جـ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

4) بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

تمرين2 (5نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما z_A و z_B حيث: $z_A=\sqrt{3}+3i$ و $z_B=\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}+3)$.

1) اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي ثم بيّن أنّ z_A^{2019} عددا حقيقيا.

2) أ) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

ب) استنتج طبيعة المثلث OAB وقيسا للزاوية الموّجهة $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$. ارسم المثلث OAB.

3) أ) بيّن أنّ $OB=2\sqrt{6}$ وأنّ $(\vec{u};\overrightarrow{OB})=\dfrac{7\pi}{12}$، ثم اكتب على الشكل المثلثي العدد المركب z_B.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

4) نعتبر النقطة C من المستوي لاحقتها z_C تحقّق: $z_C=z_B-z_A$.

أ) احسب z_C ثم بيّن أنّ الرباعي OABC متوازي الأضلاع.

ب) بيّن أنّ $z_C-z_A=i\,z_B$ ثم استنتج طبيعة متوازي الأضلاع OABC.

5) (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA}+\alpha\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=m$. $m\in\mathbb{R}_+^*$ و $\alpha\in\mathbb{R}-\{-2\}$.

أ) عيّن العدد الحقيقي α بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة المثقلة: $\{(A,1);(B,\alpha);(C,1)\}$.

ب) نضع $\alpha=-1$. عيّن قيمة m حتى تكون المجموعة (E) دائرة مركزها O وتشمل النقطة B. ارسم المجموعة (E).

تمرين3 (4نقاط)

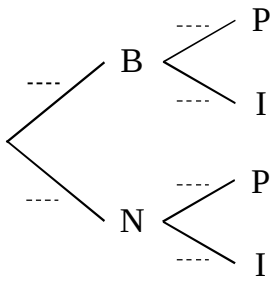
1) كيس U_1 يحتوي على 6 كرات بيضاء و5 كرات سوداء، كلّها مرقّمة بالرقم 2. نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات.
إنّ سحب كرة بيضاء يُعطي ربحا قدره 5 نقاط، وسحب كرة سوداء يُعطي ربحا قدره n نقطة (n عدد طبيعي أكبر من5).
نُعرِّف المتغير العشوائي X الذي يُرفق بكل عملية سحب مقدار الربح المُحصّل عليه.

أ) برّر أنّ قيم المتغير العشوائي هي: $\{15\,;\,n+10\,;\,2n+5\,;\,3n\}$ ، ثم عيّن قانون احتماله.

ب) بيّن أنّ الأمل الرياضياتي $E(X)$ يساوي $\frac{15}{11}(n+6)$ ثم عيّن أصغر قيمة للعدد n بحيث يكون $E(X)\geq 30$.

2) كيس U_2 يحتوي على 5 كرات مرقّمة من 1 إلى 5. نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1، إذا كانت سوداء نقوم بسحب كرة واحدة من الكيس U_2، وإذا كانت بيضاء ندخلها في الكيس U_2 ثم نسحب من هذا الأخير كرة. نعتبر الحوادث التالية:

B: سحب كرة بيضاء	P: سحب كرة تحمل رقما زوجيا
N: سحب كرة سوداء	I: سحب كرة تحمل رقما فرديا



أ) أنقل ثم أكمل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه الوضعية.

ب) احسب احتمال سحب كرة تحمل رقما فرديا.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين4 (7نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1+x\ln x$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$.

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=x^2-4x+2x^2\ln x & x>0 \\ f(x)=2(1-e^x-xe^x) & x\leq 0 \end{cases}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة، ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) بيّن أنّ الدالة f مستمرة عند المبدأ O.

3) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=-4$. ماذا تستنتج؟

4) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند المبدأ O.

5) أ) بيّن أنّ $f'(x)=4g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ، استنتج اتّجاه تغيّر f من أجل $x>0$.

ب) بيّن أنّ $f'(x)=(-2x-4)e^x$ على المجال $]-\infty;0]$ ، استنتج اتّجاه تغيّر f من أجل $x\leq 0$.

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;+\infty[$.

6) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}8<\alpha<1{,}9$.

ب) احسب $f(-1)$ و $f(2{,}3)$ ، ثم ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

7) لتكن h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=x\left[-4+|x|(1+\ln x^2)\right]$.

أ) بيّن أنّ الدالة h فردية.

ب) بيّن أنّ $h(x)=f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم اشرح كيفية رسم البيان $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h وارسمه.

تصحيح اختبار الفصل 2: 2019م

تمرين 1:

1) أ) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

$x \geq 1$ ، $\sqrt{x} \geq 1$ ، $2\sqrt{x} \geq 2$ ،

$2\sqrt{x}-1 \geq 1$ ومنه $f'(x) > 0$ ، إذن f متزايدة

ب) $x > 4$ ، $\sqrt{x} > 2$ ، $-\sqrt{x} < -2$ ،

$2-\sqrt{x} < 0$ ومنه $f(x)-x < 0$.

ولما $x \leq 4$: $f(x)-x \geq 0$.

2) أ) $u_0 = 1$: $1 \leq u_0 < 4$. محققة

نفرض أن $1 \leq u_n < 4$ ونبرهن صحة $1 \leq u_{n+1} < 4$

لدينا: $1 \leq u_n < 4$ ، $f(1) \leq f(u_n) < f(4)$

$1 \leq 2 \leq f(u_n) < 4$ ومنه $1 \leq u_{n+1} < 4$.

إذن $1 \leq u_n < 4$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ب) $u_{n+1} - u_n = 2-\sqrt{u_n}$. سابقا: $x < 4$ فإن $f(x)-x > 0$

$u_n < 4$ فإن $f(u_n) - u_n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة

ج) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n$ ، $l = l - \sqrt{l} + 2$

$\sqrt{l} = 2$ ومنه $l = 4$

3) أ) $n=0$: $v_0 = 9$ ، $4 < v_0 \leq 9$. محققة

نفرض أن $4 < v_n \leq 9$ ونبرهن: $4 < v_{n+1} \leq 9$

لدينا: $4 < v_n \leq 9$ ، $f(4) < f(v_n) \leq f(9)$.

$4 < f(v_n) \leq 8 \leq 9$ ومنه $4 < v_{n+1} \leq 9$.

إذن $4 < v_n \leq 9$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ب) $v_{n+1} - v_n = 2 - \sqrt{v_n}$.

$v_n > 4$ فإن $f(v_n) - v_n < 0$ ومنه (v_n) متناقصة

ج) (v_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$l' = \lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} v_n = l'$

$\sqrt{l'} = 2$ ومنه $l' = 4$

4) (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة

و $l = l'$ إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

تمرين 2:

1) $|z_A| = 2\sqrt{3}$ و $\arg(z_A) = \frac{\pi}{3}$ ومنه $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\pi/3}$

$z_A^{2019} = (2\sqrt{3}e^{i\pi/3})^{2019} = (2\sqrt{3})^{2019} e^{i\frac{2019\pi}{3}}$

$= (2\sqrt{3})^{2019}(\cos 673\pi + i\sin 673\pi)$

$= (2\sqrt{3})^{2019}(\cos\pi + i\sin\pi)$

بما أن $\sin\pi = 0$ ومنه z_A^{2019} حقيقي .

2) أ) $\frac{z_B - z_A}{z_A} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i} = \frac{i(\sqrt{3}+3i)}{\sqrt{3}+3i} = i$

$\frac{z_B - z_A}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left|\frac{z_B - z_A}{z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_A|} = \frac{AB}{OA} = 1$

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_A}\right) = (\vec{OA}, \vec{AB}) = \pi/2$

ومنه OAB مثلث قائم في A ومتساوي الساقين

$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4}$

ب) $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2OA^2$

ومنه: $OB = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}|z_A| = 2\sqrt{6}$

$(\vec{u}, \vec{OB}) = (\vec{u}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$

$|z_B| = 2\sqrt{6}$ و $\arg(z_B) = \frac{7\pi}{12}$ ومنه $z_B = 2\sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$2\sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-3 + i(\sqrt{3}+3)$

نجد: $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6}}$ و $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{6}}$

4) $z_C = -3 + \sqrt{3}i$

ج) $\vec{OC} = \vec{AB}$ ومنه OABC متوازي الأضلاع

ب) $\frac{z_C - z_A}{z_B} = \frac{-\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}-3)}{\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}+3)} = \frac{i(\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}+3))}{\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}+3)} = i$

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B}\right| = \frac{AC}{OB} = 1$

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B}\right) = (\vec{OB}, \vec{AC}) = \pi/2$

القطعتان [OB] و [AC] متعامدتان ومتقايستان

ومنه: OABC مربع .

5) $z_O = \frac{z_A + \alpha z_B + z_C}{1+1+\alpha} = 0$

$\alpha = -\frac{z_A + z_C}{z_B} = -\frac{z_B}{z_B} = 1$

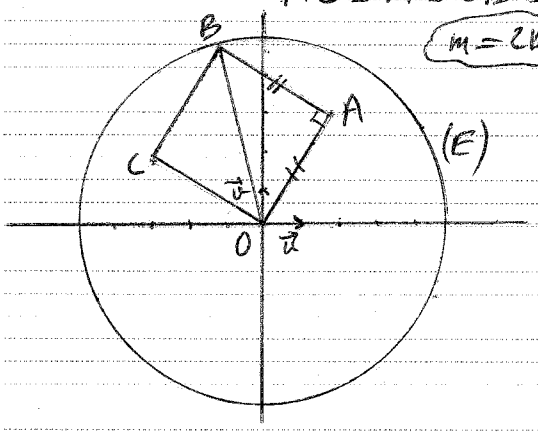
ب) $\|\vec{MO} + \vec{OA} - \vec{MO} - \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OC}\| = m$

$\|\vec{MO} + \underbrace{\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}}_{\vec{0}}\| = m$

$MO = m = OB = 2\sqrt{6}$

ومنه: $m = 2\sqrt{6}$

الرسم:



تمرين 3:

1) 3 بيضاء: $X = 15$ ، 3 سوداء: $X = 3n$

2 بيضاء 1 سوداء: $X = 10+n$ ، 2 سوداء 1 بيضاء: $X = 2n+5$

$P(X=15) = \frac{C_6^3}{C_{11}^3} = \frac{4}{33}$

$P(X=n+10) = \frac{C_6^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$

$P(X=2n+5) = \frac{C_6^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}$

$$P(X=3n) = \frac{C_6^3}{C_{11}^3} = \frac{2}{33}$$

X	15	$n+10$	$2n+5$	$3n$
$P(X)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{33}$

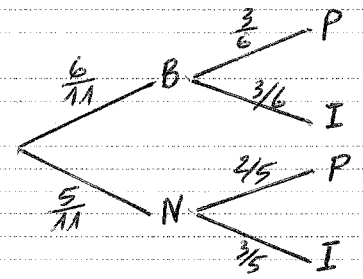
ب) $E(X) = 15\times\frac{4}{33} + (n+10)\frac{5}{11} + (2n+5)\frac{4}{11} + 3n\cdot\frac{2}{33}$

$$E(X) = \frac{45n+270}{33} = \frac{15n+90}{11} = \frac{15}{11}(n+6)$$

$E(X) \geq 30$ أي $n+6 \geq 22$

ومنه: $n \geq 16$ إذن $n=16$

2) أ)



ب) $P(I) = \frac{6}{11}\times\frac{3}{6} + \frac{5}{11}\times\frac{3}{5} = \frac{6}{11}$

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) $g'(x) = 1 + \ln x + 1 = \ln x + 2$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$		
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-1-e^{-2}$		0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $g(1)=0$. إشارة $g(x)$:

x	0		1	
$g(x)$		$-$	0	$+$

II-1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2(1-\cancelto{0}{e^x}-\cancelto{0}{xe^x}) = 2$

$y=2$ مستقيم مقارب لـ (C) عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x(x-4)+2x^2\ln x\right] = +\infty$

2) $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = 0 = f(0)$ (مستمرة)

3) $\lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\overset{>}{\to}0}(x-4+2\cancelto{0}{x\ln x}) = -4$

$\lim_{x\overset{<}{\to}0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\overset{<}{\to}0} 2\left(\cancelto{(-1)}{\frac{1-e^x}{x}} - e^x\right) = -4$

f قابلة للاشتقاق عند 0.

(C) يقبل مماسا ميله -4 عند 0

4) $(\Delta): y = f'(0)(x-0)+f(0) = -4x$

5) أ) $f'(x) = 2x-4+4x\ln x+2x = 4x-4+4x\ln x$

$f'(x) = 4(x-1+x\ln x) = 4g(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	0		1	
$g(x)$		$-$	0	$+$

$0<x<1$: f متناقصة ، $x\geq 1$: f متزايدة

ب) $f'(x) = 2(-e^x-e^x-xe^x) = 2(-2e^x-xe^x)$

$f'(x) = 2(-2-x)e^x = (-2x-4)e^x$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-2x-4)$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$2(1+e^{-2})$	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

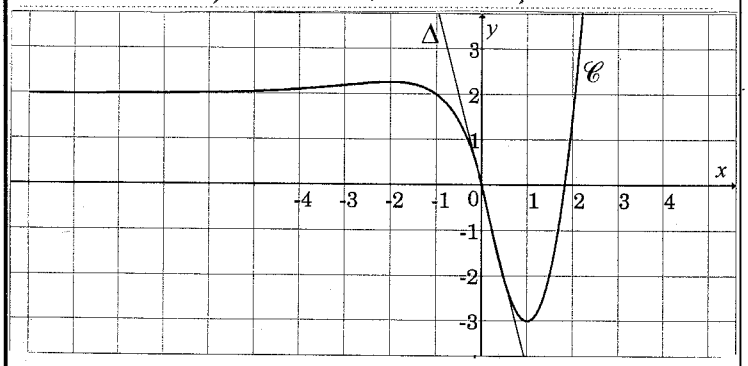
$x<-2$: f متزايدة ، $-2\leq x<0$: f متناقصة

6) أ) f مستمرة ومتزايدة على $]1,8\,;1,9[$ ،

$f(1,8)\simeq -0,15<0$ و $f(1,9)\simeq 0,64>0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,8<\alpha<1,9$

ب) $f(-1)=2$ و $f(2,3)\simeq 4,9$



7) أ) $h(-x) = -x\left[-4+|-x|\left(1+\ln(-x)^2\right)\right]$

$h(-x) = -x\left[-4+|x|\left(1+\ln x^2\right)\right]$

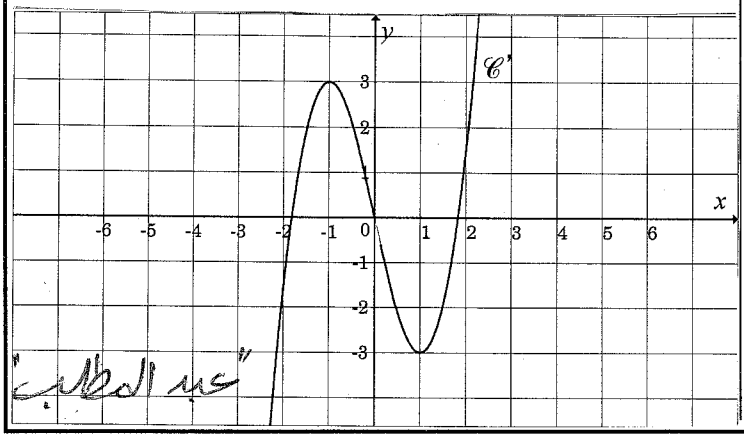
من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $h(-x) = -h(x)$

ومنه h فردية.

ب) لما $x>0$: $|x|=x$ ومنه $h(x)=f(x)$

(C) يطابق (C') ولما $x<0$: بما أن h فردية

نظائر الجزء المطابق بالنسبة للمبدأ 0.



"عبد المطلب"