الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**الفرض الأول للفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2019/2018م المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (6نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول u_0، حيث $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{u_n - 1}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 < u_n \leq 3$.

2) بيّن أنّ $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 2)^2}{u_n - 1}$. استنتج تغيرات وتقارب المتتالية (u_n).

3) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$، ثم احسب نهاية u_n.

4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها 2، ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \ldots \times e^{v_n}$.

5) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $\ln(u_0 - 1) + \ln(u_1 - 1) + \ldots + \ln(u_n - 1) = \ln(n+2)$.

تمرين2 (6نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0، حيث $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2n + 5)$.

1) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 2n + 5$.

2) بيّن أنّ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2n + 5 - u_n)$. استنتج تغيرات المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2(u_n - 2n - 1)$.

برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

4) (w_n) المتتالية المعرّفة بحدها الأول w_0، حيث $w_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} w_n + \frac{1}{n+1}$.

برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n = 2n + 1$، ثم بيّن أنّ (w_n) متتالية حسابية.

5) تحقّق أنّ $u_n = \frac{1}{2} v_n + w_n$، ثم احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

تمرين3 (8نقاط)

I- لتكن g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-2\,;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=(x+2)\ln(x+2)-x$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} g(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2) احسب $g'(x)$، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) بيّن أنّ $g(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2\,;+\infty[$.

II- لتكن f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-2\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+2-\dfrac{\ln(x+2)}{x}$.

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا.

ب) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]-2\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ فإنّ $f'(x)=1+\dfrac{g(x)}{x^2(x+2)}$.

ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا $(\mathscr{D})$ معادلته $y=x+2$.

ب) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{D})$ مع تحديد نقطة تقاطعهما.

4) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β في $\mathbb{R}$ حيث $-1{,}6<\alpha<-1{,}5$ و $0{,}3<\beta<0{,}4$.

ب) ارسم المستقيم المقارب $(\mathscr{D})$ والمنحني $(\mathscr{C})$.

5) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $\ln(x+2)=x(2-m)$.

6) لتكن h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty\,;\ln 2[$ كما يلي: $h(x)=f(-e^x)$.

اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h عند الفاصلة المعدومة.

تصحيح الفرض الأول للفصل 2: 2019م

تمرين 1:

1) * $n=0$: $2 < U_0 = 3 \leq 3$ (محققة)

* نفرض أن $2 < U_n \leq 3$ ونبرهن صحة $2 < U_{n+1} \leq 3$ أي $2 < 3 - \frac{1}{U_n - 1} \leq 3$

لدينا: $2 < U_n \leq 3$ ، $1 < U_n - 1 \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{U_n - 1} < 1$ ، $-1 < \frac{-1}{U_n - 1} \leq \frac{-1}{2}$

$2 < 3 - \frac{1}{U_n - 1} \leq \frac{5}{2} \leq 3$ ومنه: $2 < U_{n+1} \leq 3$

إذن $2 < U_n \leq 3$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) $U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n - 4}{U_n - 1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 4U_n - 4}{U_n - 1}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n - 2)^2}{U_n - 1}$

بما أن $U_n > 2$ ومنه $U_n - 1 > 1 > 0$.

$U_{n+1} - U_n < 0$ ومنه (U_n) متناقصة تماما.

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3) * $n=0$: $U_0 = \frac{3}{1} = 3$ (محققة)

* نفرض أن: $U_n = \frac{2n+3}{n+1}$ ونبرهن: $U_{n+1} = \frac{2n+5}{n+2}$

$U_{n+1} = 3 - \frac{1}{U_n - 1} = 3 - \frac{1}{\frac{2n+3}{n+1} - 1}$

$U_{n+1} = 3 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{2n+5}{n+2}$ (محققة)

ومنه: $U_n = \frac{2n+3}{n+1}$. $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{2} = 2$

4) أ) $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+1} - 2} = \frac{\frac{3U_n - 4}{U_n - 1}}{\frac{3U_n - 4}{U_n - 1} - 2} = \frac{3U_n - 4}{U_n - 2}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{3U_n - 4}{U_n - 2} - \frac{U_n}{U_n - 2} = 2\left(\frac{U_n - 2}{U_n - 2}\right)$

$V_{n+1} - V_n = 2$ ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول $V_0 = \frac{U_0}{U_0 - 2} = 3$

$V_n = V_0 + nr = 3 + 2n$

ب) $P_n = e^{V_0 + V_1 + \dots + V_n} = e^{\frac{n+1}{2}(V_0 + V_n)} = e^{(n+1)(n+3)}$

5) $\ln(U_0 - 1) + \ln(U_1 - 1) + \dots + \ln(U_n - 1) = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \dots + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$= \ln\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+2}{n+1}\right) = \ln(n+2)$

تمرين 2:

1) * $n=0$: $U_0 = 4 < 5$ (محققة)

* نفرض أن $U_n < 2n+5$ ونبرهن: $U_{n+1} < 2n+7$

لدينا: $U_n < 2n+5$ ، $U_n + 2n < 4n+5$

$U_n + 2n + 5 < 4n + 10$

$\frac{1}{2}(U_n + 2n + 5) < 2n + 5 < 2n + 7$

$U_{n+1} < 2n+7$ ومنه $U_n < 2n+5$.

2) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n + 2n + 5) - U_n$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n + 2n + 5 - 2U_n)$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(2n + 5 - U_n)$

بما أن $U_n < 2n+5$ ومنه $(2n + 5 - U_n) > 0$

إذن: $U_{n+1} - U_n > 0$ ومنه (U_n) متزايدة تماما

3) $V_{n+1} = 2(U_{n+1} - 2n - 3) = 2\left[\frac{1}{2}(U_n + 2n + 5) - 2n - 3\right]$

$V_{n+1} = 2\left[\frac{1}{2}(U_n + 2n + 5 - 4n - 6)\right] = 2\left[\frac{1}{2}(U_n - 2n - 1)\right]$

$V_{n+1} = \frac{1}{2} \times 2(U_n - 2n - 1) = \frac{1}{2} V_n$

ومنه: (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و $V_0 = 6$.

$V_n = V_0 \cdot q^n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) * $n=0$: $W_0 = 0 + 1 = 1$ (محققة)

نفرض أن: $W_n = 2n+1$ ونبرهن صحة: $W_{n+1} = 2n+3$

$W_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} W_n + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}(2n+1) + \frac{1}{n+1}$

$W_{n+1} = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n+1} = \frac{(n+1)(2n+3)}{n+1} = 2n+3$

محققة ومنه: $W_n = 2n+1$.

$W_{n+1} - W_n = 2n + 3 - (2n+1) = 2 = r$

ومنه (W_n) متتالية حسابية أساسها 2.

5) $V_n = 2(U_n - W_n)$ و منه: $U_n = \frac{1}{2} V_n + W_n$

$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$S_n = \left(\frac{1}{2}V_0 + W_0\right) + \left(\frac{1}{2}V_1 + W_1\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}V_n + W_n\right)$

$S_n = \frac{1}{2}(V_0 + V_1 + \dots + V_n) + W_0 + W_1 + \dots + W_n$

$S_n = \frac{1}{2} \cdot V_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) + \frac{n+1}{2}(W_0 + W_n)$

$S_n = 3\left(\frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2}\right) + \frac{n+1}{2}(3 + 2n + 1)$

$S_n = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)^2$

تمرين 3:

I-1) $\lim_{x \to -2} g(x) = 2$ لأن $\lim_{x \to -2} (x+2)\ln(x+2) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+2)\left[\ln(x+2) - \frac{x}{x+2}\right] = +\infty$$

2) $g'(x) = 1.\ln(x+2) + \frac{x+2}{x+2} - 1 = \ln(x+2)$

$\ln(x+2) = 0$ لما $x+2 = 1$ و منه: $x = -1$

x	-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) $g(x) \geq 1$ و منه: $g(x) > 0$.

II-1) أ) $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \to -2} \ln(x+2) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$x = -2$ و $x = 0$ مستقيمين مقاربين لـ (C).

ب) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+2)\left[1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(x+2)}{x+2}\right] = +\infty$$

2) أ) $$f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{x}{x+2} - \ln(x+2)}{x^2}\right]$$

$$f'(x) = 1 - \left[\frac{x - (x+2)\ln(x+2)}{x^2(x+2)}\right]$$

$$f'(x) = 1 + \frac{g(x)}{x^2(x+2)}$$

ب) $g(x) > 0$ و منه: $f'(x) > 0$

f متزايدة تماما على $]-2;0[\cup]0;+\infty[$

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln(x+2)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{(x+2)}{x} \cdot \frac{\ln(x+2)}{x+2} = 0$$

ومنه (D) مستقيم مقارب مائل لـ (C).

ب) لدراسة الوضعية، ندرس إشارة:

$$f(x) - y = -\frac{\ln(x+2)}{x}$$

x	-2		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	‖	$+$	
$\ln(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-y$		$-$		$+$	‖	$-$	

(C) فوق (D) : $x \in]-1;0[$

(C) تحت (D) : $x \in]-2;-1[\cup]0;+\infty[$

(C) يقطع (D) عند: $(-1;1)$.

4) أ) f مستمرة ومتزايدة على $]-2;0[$.

$f(-1,6) \simeq -0,17 < 0$ و $f(-1,5) \simeq 0,04 > 0$.

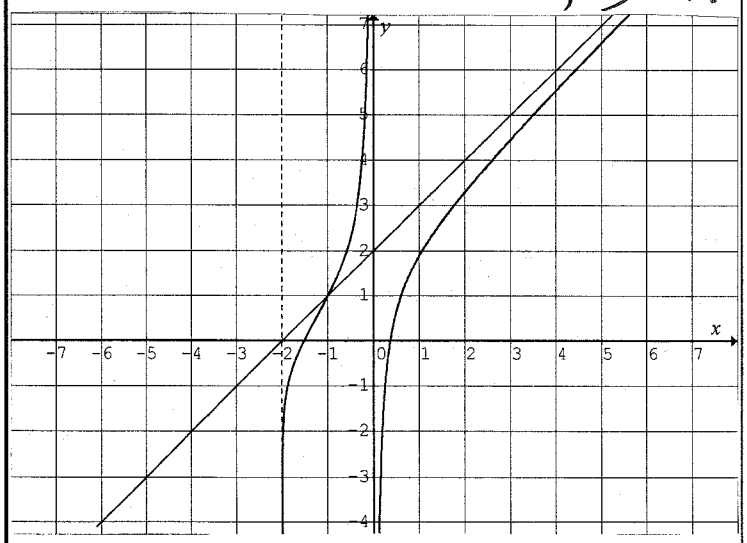
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,6 < \alpha < -1,5$

f مستمرة ومتزايدة على $]0;+\infty[$.

$f(0,3) \simeq -0,5 < 0$ و $f(0,4) \simeq 0,2 > 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0,3 < \beta < 0,4$.

ب) الرسم:



5) $m = 2 - \frac{\ln(x+2)}{x}$ ، نضيف x للطرفين

نجد: $f(x) = x + m$

$m < 2$ حلان مختلفان في الإشارة

$m \geq 2$ حل وحيد سالب

6) $h'(x) = -e^x \cdot f'(-e^x)$ ، $h(0) = f(-1) = 1$

$y = h'(0)(x-0) + h(0)$ ، $h'(0) = -f'(-1) = -2$

$y = -2x + 1$

"عبد المطلب"