المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) دورة: ماي 2019

الشعبة: علوم تجريبية إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2} - 3}{2(u_n - 2)}$.

1- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - 3 = \dfrac{(u_n - 3)^2}{2(u_n - 2)}$.

ب) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq 3$.

ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، واستنتج أنّها متقاربة.

2- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 3)$.

ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n - 3 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

3- من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. بيّن أنّ $S_n \leq 3n + 5 - 2^{-n}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 24 = 0$.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B من هذا المستوي لاحقتيهما العددين المركبين: $z_A = 3\sqrt{2} - i\sqrt{6}$ و $z_B = 3\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

1- أ) اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة التالية: z_A ، z_B و $\dfrac{z_A}{z_B}$، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $z_A^{\,n} = z_B^{\,n}$.

2- أ) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OAB.

ب) بيّن أنّ النقط A، B و O تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$، يطلب تعيين مركزها، نصف قطرها ومساحتها s.

3- ليكن التحاكي h الذي مركزه النقطة G ونسبته $-\dfrac{1}{2}$.

أ) بيّن أنّ العبارة المركبة لهذا التحاكي هي $z' = -\dfrac{1}{2}z + 3\sqrt{2}$.

ب) استنتج $(\mathscr{C}')$ صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ بالتحاكي h، واحسب مساحتها s'.

جـ) عيّن z_C لاحقة النقطة C حتى تكون B صورة C بالتحويل h. ماذا يمكن قوله عن النقاط B، C و G؟

د) تحقّق أنّ $z_A = z_B + z_C$، ثم استنتج طبيعة الرباعي OCAB.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;-1;-2)$، $C(1;0;0)$ و $D\left(\frac{5}{6};\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)$. ليكن $\mathscr{P}_1$ المستوي من هذا الفضاء المعرّف بمعادلته الديكارتية $x+2y-z=3$ ، و $\mathscr{P}_2$ المستوي المعرّف بمعادلته الديكارتية $x+y=2$.

1- بيّن أنّ المستويين $\mathscr{P}_1$ و $\mathscr{P}_2$ يتقاطعان. أعط تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما (d).

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (BC). بيّن أنّ المستقيمين (d) و(BC) ليسا من المستوي نفسه.

3- بيّن أنّ النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC). احسب الطول AD.

4- أ) لتكن (E) مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AD}=\frac{5}{6}$. بيّن أنّ (E) تكافئ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD}=0$.

ب) بيّن أنّ المجموعة (E) هي المستوي $\mathscr{P}_3$ حيث معادلته الديكارتية: $x+5y-2z=6$.

5- استنتج مما سبق تقاطع المستويات $\mathscr{P}_1$ ، $\mathscr{P}_2$ و $\mathscr{P}_3$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $D_f=]\ln 2;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\ln\left(\frac{e^x}{2e^x-4}\right)$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\ln 2} f(x)$ مع تفسير النتيجة بيانيا.

2- أ) أثبت أنّه من أجل كل x من D_f، فإنّ $f(x)=x-\ln 2+\ln\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right)$.

ب) استنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ يطلب كتابة معادلته.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقع فوق المستقيم المقارب المائل (Δ).

3- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $D_g=]\ln 2;+\infty[$ بـ: $g(x)=f(x)-x$.

أ) أثبت أنّ $g(x)\le 0$ من أجل $x\ge 2\ln 2$.

ب) استنتج وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ') ذي المعادلة $y=x$.

4- أ) أثبت أنّه من أجل كل x من D_f، فإنّ $f'(x)=\frac{e^x-4}{e^x-2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) ارسم المستقيمين (Δ) و(Δ')، والمنحني $(\mathscr{C})$.

5- أ) استنتج مما سبق أنّ: من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 2\ln 2$، فإنّ $x-\ln 2\le f(x)\le x$.

ب) استنتج حصرا لمساحة الحيّز $\mathscr{A}$ المحدّدة بالمنحني $(\mathscr{C})$، والمستقيمات: $y=0$ ، $x=\frac{3}{2}$ و $x=2$.

6- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\ln 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\ln 2\le u_n\le \ln 6$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n). استنتج أنّها متقاربة ثم احسب نهايتها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n+4}u_n$.

1- احسب الحدود: u_1، u_2 و u_3.

2- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، واستنتج أنّها متقاربة.

3- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=(n+1)u_n$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم احسب حدّها الأوّل v_0.

ب) اكتب عبارة u_n بدلالة n، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4- أ) احسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $P'_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$. بيّن أنّ $P'_n=\frac{P_n}{(n+1)!}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A، B و C من هذا المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=2+2i$ ، $z_B=-2+6i$ و $z_C=z_A+z_B$.

1- أ) احسب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_B}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ACB.

ب) احسب $\frac{z_C-z_B}{z_A}$، ثم استنتج طبيعة الرباعي OACB.

جـ) بيّن أنّ العدد $(z_A+z_B+z_C)^{2019}$ تخيلي صرف، ثم احسبه.

2- لتكن النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة B.

أ) بيّن أنّ لاحقة النقطة D هي $z_D=-4+4i$.

ب) بيّن أنّ D هي صورة C بالتشابه المباشر الذي مركزه O، نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

3- أ) بيّن أنّ لاحقة النقطة E حتى يكون الرباعي OECD مربع هي $z_E=4+4i$.

ب) بيّن أنّ المجموعة (Γ_1) للنقط M من المستوي التي تحقّق $|z|=|z+\overline{z_D}|$ هي المستقيم (AB).

4- أ) بيّن أنّ النقطة A هي مرجح الجملة: $\{(C،-1);(D،1);(E،2)\}$.

ب) عيّن المجموعة (Γ_2) للنقط M من المستوي التي تحقّق: $\|-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}\|=\|\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MO}\|$.

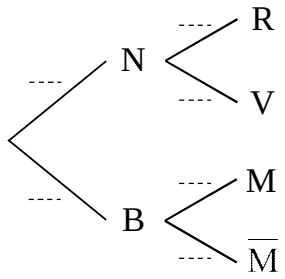
التمرين الثالث: (04 نقاط)

1- يحتوي كيس على 6 كريات حمراء (R) و4 كريات خضراء (V). نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين.

احسب احتمال سحب كريتين من نفس اللون.

2- زهرة نرد مكعبة ومتوازنة لها وجه لونه أسود، وباقي الأوجه لونها أبيض. ما احتمال ظهور الوجه الأبيض؟

3- نرمي هذا النرد. إذا ظهر الوجه الأسود، نسحب كرة واحدة من الكيس، وإذا ظهر الوجه الأبيض، نسحب كرتين في آن واحد من الكيس. السحب يكون بطريقة عشوائية.



نسمي الحادثة N: ظهور الوجه الأسود للنرد.

نسمي الحادثة B: ظهور الوجه الأبيض للنرد.

نسمي الحادثة M: سحب كريتين من الكيس من نفس اللون.

أ) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه الوضعية.

ب) احسب الاحتمال $p(M)$.

ج) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها عند السحب من الكيس.

احسب $p(X=2)$، واستنتج حساب $p(X=1)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x)=xe^{x+1}+1 & x\le -1 \\ f(x)=e^{-x-1}+x & x>-1 \end{cases}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ مع تفسير النتيجة بيانيا.

2- بيّن أنّ $\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\overset{<}{\to}0}\dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h}=0$. ماذا تستنتج؟ نذكّر: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$.

3- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد $x\le-1$ فإنّ $f'(x)\le0$، ومن أجل كل عدد $x>-1$ فإنّ $f'(x)>0$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

4- أ) بيّن أنّه من أجل كل $x>-1$ يوجد مماس (Δ) لـ $(\mathscr{C})$ يشمل النقطة $(1;1)$. لا يطلب كتابة معادلة (Δ).

ب) ارسم المماس (Δ)، المنحني $(\mathscr{C})$ والمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $-f$ في نفس المعلم.

5- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ $\int_{-3}^{-1}xe^{x+1}dx=-2+4e^{-2}$.

ب) احسب المساحة $\mathscr{A}$ للحيز المستوي المحدّد بين المنحنيين $(\mathscr{C})$ و$(\mathscr{C}')$، والمستقيمين: $x=-3$ و $x=-1$.

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا التجريبي 2019م

الموضوع الأول

تمرين 1:

1- أ) $u_{n+1}-3=\frac{u_n^2-3}{2(u_n-2)}-3=\frac{u_n^2-6u_n+9}{2(u_n-2)}=\frac{(u_n-3)^2}{2(u_n-2)}$

ب) $n=0$: $u_0=4\geq 3$ (محققة)

نفرض أن $u_n\geq 3$ ونبرهن $u_{n+1}\geq 3$ أي $u_{n+1}-3\geq 0$

لدينا: $u_{n+1}-3=\frac{(u_n-3)^2}{2(u_n-2)}\geq 0$ (محققة) (ومنه $u_n\geq 3$)

جـ) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-3}{2(u_n-2)}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-3)}{2(u_n-2)}\leq 0$

لأن $u_n-3\geq 0$ و $u_n-1\geq 0$ و $u_n-2\geq 0$. (u_n) متناقصة

2- أ) $u_{n+1}-3\leq\frac{1}{2}(u_n-3)$ تكافئ $u_{n+1}-3-\frac{1}{2}(u_n-3)\leq 0$

$$\frac{u_n^2-3}{2(u_n-2)}-3-\frac{1}{2}(u_n-3)=\frac{-(u_n-3)}{2(u_n-2)}\leq 0$$

ب) $n=0$: $u_0-3=1\leq 1$ (محققة)

نفرض أن $u_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ونبرهن $u_{n+1}-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

لدينا: $u_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ نضرب $\times\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}(u_n-3)\leq\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\frac{1}{2}(u_n-3)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ، ولدينا سابقا: $u_{n+1}-3\leq\frac{1}{2}(u_n-3)$

ومنه: $u_{n+1}-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ، إذن $u_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ صحيحة

جـ) لدينا: $0\leq u_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $\lim_{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

حسب مبرهنة الحصر فإن $\lim_{+\infty}(u_n-3)=0$

ومنه: $\lim_{+\infty}u_n=3$

3- $u_0-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$+\quad u_1-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^1$

$\vdots$

$+\quad u_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

بالجمع: $(u_0-3+u_1-3)+\dots+u_n-3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

(مجموع متتالية هندسية)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\left(1-2^{-n-1}\right)$$
$$=2-2^{-n}$$

ومنه:

$$u_0-3+u_1-3+\dots+u_n-3\leq 2-2^{-n}$$

$$\underbrace{u_0+u_1+\dots+u_n}-3-3+\dots-3\leq 2-2^{-n}$$

$$S_n-3(n+1)\leq 2-2^{-n}$$

في الأخير: $S_n\leq 5+3n-2^{-n}$

تمرين 2:

I- $\Delta=-24=(2\sqrt{6}i)^2$

ومنه: $z_1=3\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ و $z_2=3\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

II- 1- أ) $z_A=2\sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ و $z_B=2\sqrt{6}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=1$ أي $OA=OB$ / $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=-\frac{\pi}{3}$ أي $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=-\frac{\pi}{3}$

ومنه المثلث OAB متساوي الأضلاع.

ب) $z_A^n=(2\sqrt{6})^n e^{i\left(-\frac{n\pi}{6}\right)}$ و $z_B^n=(2\sqrt{6})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$

$z_A^n=z_B^n$ يعني: $\frac{n\pi}{6}=\frac{-n\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{N})$

ومنه: $n=6k$ $(n\in\mathbb{N})$

2- أ) $z_G=\frac{z_O+z_A+z_B}{3}=2\sqrt{2}$

ب) $GO=GA=GB=2\sqrt{2}$ ومنه O ، A و B تنتمي إلى الدائرة: مركزها G و $r=2\sqrt{2}$. $S=8\pi$ u.a

3- أ) $z'-z_G=-\frac{1}{2}(z-z_G)$

ومنه $z'=-\frac{1}{2}z+3\sqrt{2}$

ب) (C') تحافظ على المركز ونصف قطرها $r'=\frac{1}{2}r$:

(C') هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $r'=\sqrt{2}$

$S=\pi r^2$ و $S'=\pi(r')^2$ ومنه $S'=2\pi$ u.a

جـ) $z_B=-\frac{1}{2}z_C+3\sqrt{2}$ ومنه $z_C=-2\sqrt{6}i$

$z_B-z_G=-\frac{1}{2}(z_C-z_G)$ ومنه $\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

إذن B ، C و G على استقامة واحدة

د) $z_B+z_C=3\sqrt{2}+i\sqrt{6}-2\sqrt{6}i=3\sqrt{2}-i\sqrt{6}$

ومنه: $z_B+z_C=z_A$ أي $z_B=z_A-z_C$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}$ إذن $OCAB$ متوازي الأضلاع

لدينا سابقا: $AB=OB$ ومنه:

الرباعي $OCAB$ معين.

تمرين 3:

1- $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ P_1 و $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ P_2.

$\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ غير مرتبطان خطيا ومنه P_1 و P_2 يتقاطعان

$\begin{cases}x+2y-z=3\\x+y=2\end{cases}$ بوضع $z=t$: $\begin{cases}x+2y-t=3 & (1)\\x+y=2 & (2)\end{cases}$

(2) - (1) ينتج: $y=t+1$ $(t\in\mathbb{R})$

نعوض في (1) نجد: $x=-t+1$

ومنه التمثيل الوسيطي لـ(d): $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

2- $\overrightarrow{BM} = \alpha \overrightarrow{BC}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ و $\overrightarrow{BC}(-1,1,2)$

$\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ ومنه: $(BC): \begin{cases} x = -\alpha+2 \\ y = \alpha-1 \\ z = 2\alpha-2 \end{cases}$

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (d).

$\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطان خطيا ومنه:

نحل الجملة:

$$\begin{cases} -t+1 = -\alpha+2 & (1) \\ t+1 = \alpha-1 & (2) \\ t = 2\alpha-2 & (3) \end{cases}$$

(1)+(2) ينتج: $2 = 1$ (مستحيل)

ومنه (d) و (BC) ليسا من نفس المستوي

3- $\overrightarrow{AD}\left(-\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}; \frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ ومنه (AD) عمودي على (BC).

كذلك $D \in (BC)$: $\begin{cases} \frac{5}{6} = -\alpha+2 \\ \frac{1}{6} = \alpha-1 \\ \frac{1}{3} = 2\alpha-2 \end{cases}$ $\alpha = \frac{7}{6}$

$AD = \sqrt{\frac{5}{6}}$

4- أ) $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD})\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} + AD^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} + \frac{5}{6}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} + \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ ومنه $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = 0$

ب) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = 0$ هو المستوي الذي يشمل A و $\overrightarrow{AD}$ ناظمي له.

$-\frac{1}{6}x - \frac{5}{6}y + \frac{1}{3}z + d = 0$

نجد $d = 1$:

ومنه: $P_3: -x - 5y + 2z + 6 = 0$

5- $P_1 \cap P_2$ هو المستقيم (d).

تقاطع (d) و (P_3): $-t+1+5(t+1)-2t = 6$

نجد $t=0$ ومنه: $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ في $A(1,1,0)$

تمرين 4:

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \ln\left[\frac{e^x}{e^x\left(2-\frac{4}{e^x}\right)}\right] = +\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} \ln 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} \ln 2} x + \ln\left(\frac{e^x}{2e^x-4}\right) = +\infty$

$x = \ln 2$ مستقيم مقارب لـ(C).

2- أ) $f(x) = x + \ln\left[\frac{e^x}{2(e^x-2)}\right] = x + \ln\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right)$

$f(x) = x - \ln 2 + \ln\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right)$

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x - \ln 2) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left[\frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)}\right] = 0$

ومنه: $y = x - \ln 2$ مستقيم مقارب مائل لـ(C).

ج) $x > \ln 2$ ومنه $e^x - 2 > 0$ ولدينا $e^x > e^x - 2$

ومنه: $\frac{e^x}{e^x-2} > 1$ إذن: $f(x) - y = \ln\left(\frac{e^x}{e^x-2}\right) > 0$

3- أ) $x \geq 2\ln 2$ ؛ $e^x \geq 4$ ؛ بإضافة e^x:

$2e^x \geq e^x + 4$ ومنه: $e^x \leq 2e^x - 4$

$0 < \frac{e^x}{2e^x-4} \leq 1$ ومنه: $g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{2e^x-4}\right) \leq 0$

ب) $\ln 2$ | $+$ | $2\ln 2$ | $-$

(C) فوق (Δ) | (C) تحت (Δ)

يقطع عند $(2\ln 2, 2\ln 2)$

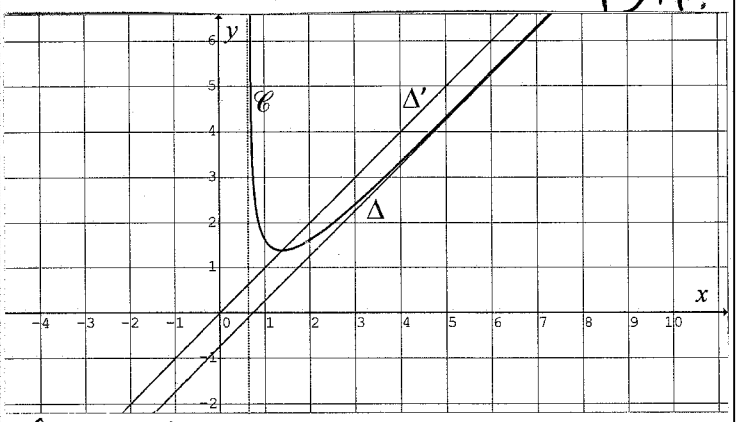
4- أ) $f(x) = x + \ln e^x - \ln(2e^x-4)$

$f'(x) = 2 - \frac{2e^x}{2e^x-4} = \frac{e^x-4}{e^x-2}$

ب) إشارة $f'(x)$: $2\ln 2$ | $-$ | $+$

x	$\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$2\ln 2$	↗	

ج) الرسم



5- أ) لدينا سابقا: $f(x) - x \leq 0$ لما $x \geq 2\ln 2$ (إشارة $g(x)$)

و $f(x) - (x - \ln 2) > 0$ (الوضعية) ومنه:

$x - \ln 2 \leq f(x) \leq x$

ب) $A = \int_{3/2}^{2} f(x)\,dx$ ولدينا $\int_{3/2}^{2}(x-\ln 2)\,dx \leq \int_{3/2}^{2} f(x)\,dx \leq \int_{3/2}^{2} x\,dx$

ومنه $\left[\frac{x^2}{2} - x\ln 2\right]_{3/2}^{2} \leq A \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_{3/2}^{2}$ أي $0{,}528 \leq A \leq 0{,}875$

6- أ) $2\ln 2 \leq u_0 = \ln 6 \leq \ln 6$: $n=0$ (محققة)

نفرض أن: $2\ln 2 \leq u_n \leq \ln 6$ ونبرهن: $2\ln 2 \leq u_{n+1} \leq \ln 6$

f متزايدة على $[2\ln 2, +\infty[$ ومنه: $f(\ln 4) \leq f(u_n) \leq f(\ln 6)$

أي $\ln 4 \leq f(u_n) \leq \ln 6 + \ln\frac{3}{4}$ $\ln 4 \leq u_{n+1} \leq \ln 6$

ومنه $\ln 4 \leq u_n \leq \ln 6$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$

سابقا: $g(u_n) \leq 0$ من أجل $u_n \geq 2\ln 2$ ومنه:

$f(u_n) - u_n \leq 0$ (متناقصة ومصورة من الأعلى) فهي متقاربة ومنه $\lim f(u_n) = \ell$

$\ell = \ln 4$

الموضوع الثاني

تمرين 1 :

1- $U_1 = \frac{\pi}{4} U_0 = \frac{1}{8}$ ، $U_2 = \frac{1}{24}$ ، $U_3 = \frac{1}{64}$

2- أ) $n=0$: $U_0 = \frac{1}{2} > 0$

نفرض أن $U_n > 0$ ونبرهن $U_{n+1} > 0$.

$n+1 > 0$ ، $2n+4 > 0$ ، $U_n > 0$ ومنه $\frac{n+1}{2n+4} U_n > 0$

$U_{n+1} > 0$ ومنه $U_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب) $U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{2n+4} U_n - U_n = -\left(\frac{n+3}{2n+4}\right) U_n < 0$

ومنه (U_n) متناقصة تماما .

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة .

3- أ) $V_{n+1} = (n+2) U_{n+1} = (n+2) \cdot \frac{(n+1)}{2(n+2)} U_n$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1) U_n = \frac{1}{2} V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية حدها الأول $V_0 = \frac{1}{2}$

ب) $U_n = \frac{V_n}{n+1} = \frac{V_0 \cdot q^n}{n+1} = \frac{(1/2)^n}{2(n+1)}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ لأن : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

4- أ) $S_n = V_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$

$S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$P_n = V_0 \times V_0 \cdot q^1 \times V_0 \cdot q^2 \times \dots \times V_0 \cdot q^n$

$P_n = V_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+3n+2}{2}}$

ب) $P'_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n = \frac{V_0}{1} \times \frac{V_1}{2} \times \dots \times \frac{V_n}{n+1}$

$P'_n = \frac{V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n+1)} = \frac{P_n}{(n+1)!}$

تمرين 2 :

1- أ) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_B} = \frac{-4+4i}{2+2i} = 2i$

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_B}\right) = (\vec{BC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه ACB قائم

ب) $\frac{z_C - z_B}{z_A} = \frac{z_A}{z_A} = 1$

$\vec{BC} = \vec{OA}$ ومنه $OACB$ متوازي الأضلاع

جـ) $(z_A + z_B + z_C)^{2019} = (16i)^{2019}$

$= 16^{2019} \cdot e^{i\frac{2019\pi}{2}}$

$(z_A + z_B + z_C)^{2019} = 16^{2019} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$= 16^{2019}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

بما أن $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ فإن $(z_A + z_B + z_C)^{2019}$ تخيلي صرف

$(z_A + z_B + z_C)^{2019} = -16^{2019} i$

2- أ) $\frac{z_C + z_D}{2} = z_B$ ومنه $z_D = 2z_B - z_C = -4+4i$

ب) $z' - z_O = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_O)$

$z_D - z_O = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z_C - z_O)$

$z_D = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(8i) = -4+4i$ (محققة)

3- أ) $OECD$ مربع يعني : $\vec{OE} = \vec{DC}$

$z_E = z_C - z_D = 4+4i$

ب) لاحظ أن : $\overline{z_D} = -z_E$

ومنه : $|z - z_O| = |z - z_E|$

$OM = EM$: (Γ_1) هي محور القطعة $[OE]$.

$\frac{z_B - z_A}{z_E} = i$ ومنه (AB) عمودي على $[OE]$

$\frac{z_O + z_E}{2} = z_A$ ومنه A هي منتصف $[OE]$.

إذن المستقيم (AB) محور القطعة $[OE]$

4- أ) $z_A = \frac{-z_C + z_D + 2z_E}{-1+1+2} = 2+2i$ (محققة)

ب) $\|-\vec{MC} + \vec{MD} + 2\vec{ME}\| = \|\vec{ME} - \vec{MO}\|$

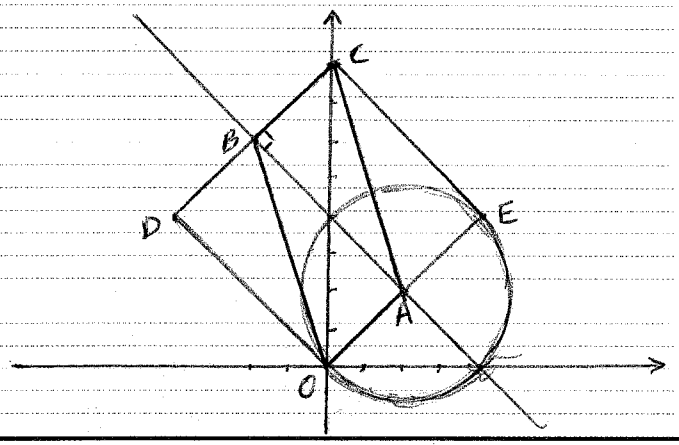
$\|-(\vec{MA} + \vec{AC}) + (\vec{MA} + \vec{AD}) + 2(\vec{MA} + \vec{AE})\| = \|\vec{EM} + \vec{MO}\|$

$\|2\vec{MA} \underbrace{- \vec{AC} + \vec{AD} + 2\vec{AB}}_{\vec{0}}\| = \|\vec{EO}\|$

$MA = \frac{EO}{2} = OA$

ومنه (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها A وتشمل O .

$(r = OA = 2\sqrt{2})$

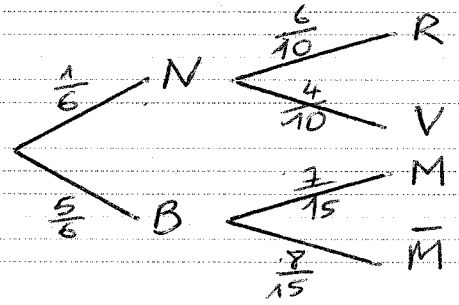


التمرين 3:

1- $P_1 = \dfrac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \dfrac{7}{15}$

2- $P_2 = \dfrac{5}{6}$

3- أ)



ب) $P(M) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{7}{15} = \dfrac{7}{18}$

ج) $P(X=2) = P(\bar{M}) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{8}{15} = \dfrac{4}{9}$

$P(X=1) = 1 - P(X=2) = \dfrac{5}{9}$

تمرين 4:

1- أ) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{xe^x}_{0} + 1 = 1$

$y=1$: مستقيم مقارب لـ (C).

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{e^{-x-1}}_{0} + x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x-1} = 0$

$y=x$: مستقيم مقارب مائل لـ (C) (بجوار $+\infty$).

2- $\lim\limits_{h \overset{<}{\to} 0} \dfrac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \overset{<}{\to} 0} \dfrac{(h-1)e^h + 1}{h}$

$= \lim\limits_{h \overset{<}{\to} 0} \left[1 - \underbrace{\dfrac{e^h - 1}{h}}_{1} \right] = 0$

$\lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \dfrac{e^{-h} + h - 1}{h}$

$= \lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \left[1 - \underbrace{\dfrac{e^{-h} - 1}{-h}}_{1} \right] = 0$

f قابلة للاشتقاق عند -1 : $f'_d(-1) = f'_g(-1)$

3- أ) $f'(x) = (x+1)e^{x+1}$: $x \leq -1$

بما أن $x \leq -1$ فإن $(x+1) \leq 0$ ومنه $f'(x) \leq 0$.

$f'(x) = -e^{-x-1} + 1$: $x > -1$

$e^{-x-1} < 1$ ، $-x-1 < 0$ ، $-x < 1$ ، $x > -1$

$-e^{-x-1} > -1$ ، $1 - e^{-x-1} > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

ب) $x \leq -1$: f متناقصة

$x > -1$: f متزايدة.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

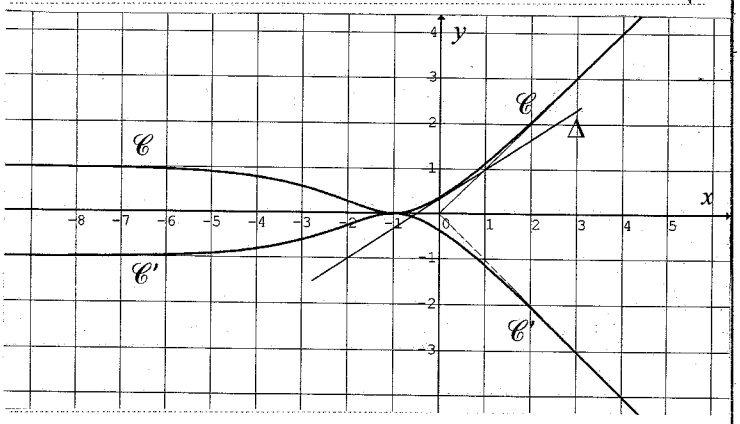
4- أ) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$1 = f'(x_0)(1 - x_0) + f(x_0)$

$1 = (1 - e^{-x_0-1})(1 - x_0) + e^{-x_0-1} + x_0$

$x_0 e^{-x_0-1} = 0$ ومنه $x_0 = 0$

ب) (C') هو نظير (C) بالنسبة للمحور (Ox).



5- أ) نضع: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{x+1} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{x+1} \end{cases}$

$\int_{-3}^{-1} x e^{x+1} dx = \left[x e^{x+1} \right]_{-3}^{-1} - \int_{-3}^{-1} e^{x+1} dx$

$\int_{-3}^{-1} x e^{x+1} dx = \left[(x-1) e^{x+1} \right]_{-3}^{-1} = 4e^{-2} - 2$

ب) $A = \int_{-3}^{-1} f(x) - (-f(x))\, dx = 2 \int_{-3}^{-1} f(x)\, dx$

$A = 2 \left[\int_{-3}^{-1} x e^{x+1} dx + \int_{-3}^{-1} 1\, dx \right] = 2 \left[(-2 + 4e^{-2}) + [x]_{-3}^{-1} \right]$

$A = \dfrac{8}{e^2} \simeq 1{,}08$

6) $m \leq 0$: لا يوجد حلول.

$0 < m < \dfrac{1}{e}$: حل موجب.

$m = 1/e$: حل مضاعف.

$m > 1/e$: حل سالب.

"عبد المطلب"